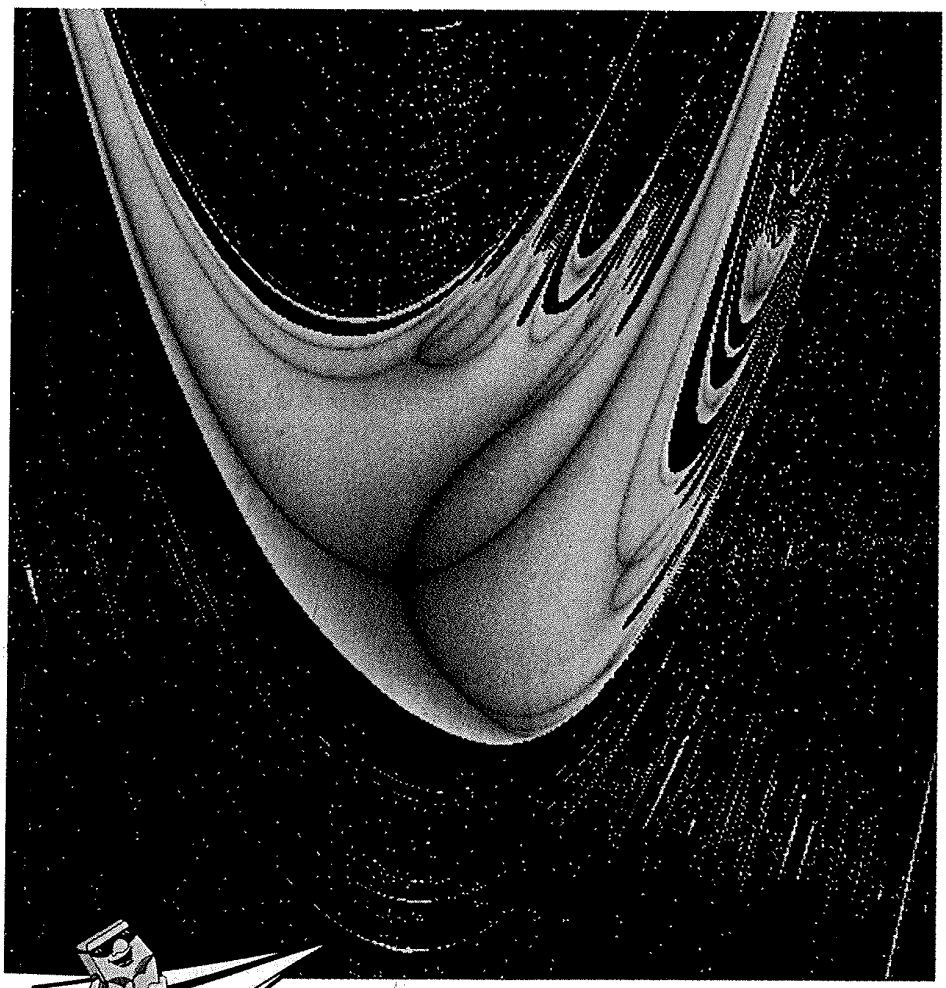
GLACIETE JARDIM ZAGO
WALTER ANTONIO SCIANI

Exponencial e Logaritmos



Estudo e Uso

MATEMÁTICA · MATEMÁTICA · MATEMÁTICA

SÉRIE

ÉRICA
EDITORA

QUEM SOMOS?

A Érica é uma editora especializada em publicações técnicas voltadas para leitores ávidos de informações atualizadas, completas, de fácil compreensão, e material dirigido a estudantes, autodidatas e profissionais de mercado.

Nossas publicações são produzidas por conhecidos e atuantes profissionais de mercado, a nível nacional e internacional, cobrindo diversos segmentos, tais como: Eletrônica, Computação, Linguagens, Negócios, Finanças, Marketing, Inglês, Multimídia, Turismo e outros, constituindo um caminho seguro e certo para os que desejam ampliar e solidificar sua base de conhecimentos, assim como para os iniciantes, aos quais dedicamos grande parte de nossas obras.

POR QUE CADASTRAR-SE JUNTO A ÉRICA?

Estamos em contínuo aprimoramento, sempre com o objetivo de melhor servir nossos leitores, cuja opinião é muito importante para que possamos melhorar ainda mais nossos serviços, fornecendo sempre produtos modernos e de qualidade.

Ao preencher e remeter a ficha de cadastro no final deste livro, nossos leitores passarão a receber, de forma sistemática, não somente informações sobre nossos novos lançamentos, como também sobre assuntos variados de interesse geral, escritos por alguns de nossos 500 autores.

PARTICIPE, não é necessário selar o cartão de resposta, basta preenchê-lo e depositá-lo em uma das inúmeras caixas de correio em todas as cidades brasileiras.

Ariadne Jardim Lago
1º J
5

Exponencial e Logaritmos

EDITORA AFILIADA

Conselho Editorial: Antonio Carlos de Lourenço
Celso de Araújo
Eduardo Cesar Alves Cruz
Glaciete Jardim Zago
Salomão Choueri Júnior
Walter Antonio Sciani

Consultor Técnico: Walter Antonio Sciani
Diagramação: Graziela M. L. Gonçalves
Desenhos Técnicos: Pedro Paulo Vieira Herruzo
Capa Criação: Maurício Scervianinas de França
Foto: Fractal Swallow
Supervisão: Rosana Arruda da Silva

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Zago, Glaciete Jardim
Exponencial e Logaritmos / Glaciete Jardim Zago, Walter Antonio Sciani. -- São Paulo: Érica, 1996. -- (Estude e Use. Série Matemática)

Bibliografia.
ISBN 85-7194-353-2

1. Funções 2. Logaritmos I. Sciani, Walter Antonio, 1949- II. Título. III. Série.

96-2360 CDD-510-512.7

Índices para catálogo sistemático

1. Funções exponenciais : Matemática 510
2. Logaritmos : Matemática 512.7

Glaciete Jardim Zago
Walter Antonio Sciani

Exponencial e Logaritmos

Ano: 2000 1999 98 97 **96**
Edição: 9 8 7 6 5 4 3 2 **1**

Editora Érica Ltda

ÉRICA
EDITORA

Editora Érica Ltda
Rua Jarinu, 594 - Tatuapé
São Paulo - SP
CEP: 03306-000 - Cx. Postal 14.577
Telefone:(011) 295-3066 - Fax (011): 217.4060

Os autores e a editora acreditam que todas as informações aqui apresentadas estão corretas e podem ser utilizadas para qualquer fim legal.

Entretanto, não existe qualquer garantia, seja explícita ou implícita, de que o uso de tais informações conduzirá sempre ao resultado desejado.

Objetivos

1. Desenvolver a capacidade de absorver e avaliar idéias.
2. Ensinar de um modo mais intuitivo e menos formal.
3. Aplicar o ensino matemático na resolução de problemas práticos.
4. Utilizar linguagem simples e direta na abordagem de cada assunto.

Índice

Capítulo 1
Potências e Raízes

1.1 Potências

Em muitas áreas como Astronomia, Física, Biologia, Química etc, os profissionais lidam com números extremamente grandes ou pequenos, tais como:

- distância média da Terra ao Sol: 149 631 000 km
- velocidade da luz no vácuo: 300 000 000 m/s
- massa do elétron: 0, 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 911 kg
- massa do próton: 0, 000 000 000 000 000 000 000 000 001 673 kg
- carga elétrica elementar: 0, 000 000 000 000 000 001 602 C

A representação decimal desses números, por ser muito extensa, dificulta a sua escrita e torna trabalhosa qualquer operação feita com números dessa magnitude.

Para simplificar escrevemos esses números de modo sintetizado, sem alterá-los, usando a noção de potência.

Definição

Dados um número real **a** e um número inteiro **n**, então

$a^n = \underbrace{a.a \ldots. a}_{n \text{ fatores}}$, para $n>1$

onde a^n é a potência de base **a** e expoente **n**.

Temos também:

$a^0 = 1$

$a^1 = a$

$a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$, com $a \neq 0$

Exercícios

1. Calcule

a) 2^4
b) 4^2
c) 1^3
d) 3^1
e) $(-3)^4$
f) -3^4
g) $(-2)^5$
h) -2^5
i) 0^3
j) 3^0
k) $-(-1)^{20}$
l) $(572)^0$

2. Calcule

a) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^3$
b) $\left(-\dfrac{1}{2}\right)^4$
c) $\left(\dfrac{-3}{2}\right)^5$
d) $\left(-\dfrac{7}{4}\right)^0$
e) $(1,7)^2$
f) $\left(-\dfrac{5}{4}\right)^2$
g) $(0,25)^2$
h) $(0,6)^3$
i) $-\left(-\dfrac{1}{3}\right)^4$

3. Calcule:

a) 2^{-3}
b) 5^{-1}
d) $(-3)0^{-1}$
e) $\dfrac{1}{(-3)^{-2}}$
g) $-\left(\dfrac{3}{2}\right)^{-2}$
h) $\dfrac{2}{\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-2}}$

c) $(-2)^{-2}$ f) $\left(\frac{4}{3}\right)^{-3}$ i) $\frac{-1}{(1{,}33\ldots)^{-2}}$

4. Dê o valor das seguintes expressões:

a) $(0{,}75)^2 - (0{,}5)^3$

b) $2.\left(\frac{1}{3}\right)^2 + 5 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 4.2^{-1} + 3.\left(\frac{27}{11}\right)^0$

c) $5 . 2^4 - 3 . 2^2 + 2 . (-2)^3 - 7 . (-1)^2 + (-1)^5$

d) $2\,(2^2 - 2^{-2})^2$

e) $\frac{2^{10} - 3^6}{2^5 + 3^3}$

f) $\frac{10^{-3}.10^5}{10.10^4}$

g) $\frac{1945.2^3 - 1944.2^3}{2^3}$

5. Sejam os números inteiros $A = 2^3.3^x.5^y$ e $B=10^4.3^8$. Se o máximo divisor comum de A e B é 360, calcule x + y.

1.2 Propriedades

As potências com expoente inteiro têm as seguintes propriedades:

- $a^m . a^n = a^{m+n}$
- $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, com $a \neq 0$
- $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$, com $b \neq 0$
- $(a^m)^n = (a^n)^m = a^{m.n}$
- $(a . b)^n = a^n . b^n$

Exercícios

6. Calcule

a) $2^{-3} \cdot 2^5$

b) $\dfrac{3^4}{3^{-1}}$

c) $\left(\dfrac{1}{4}\right)^2 . 32$

d) $5^8 . \left(\dfrac{1}{5}\right)^{10}$

e) $\left[2^2 . \left(\dfrac{1}{4}\right)^{-1}\right]^2$

f) $2^{m-3} : 2^{m-2}$

g) $\dfrac{3^{n+1} - 3^n}{3^n}$

Solução

a) $2^{-3} . 2^5 = 2^{-3+5} = 2^2 = 4$

b) $\dfrac{3^4}{3^{-1}} = 3^{4-(-1)} = 3^5 = 243$

c) $\left(\dfrac{1}{4}\right)^2 . 32 = \dfrac{1}{16} . 32 = 2$

d) $5^8 . \left(\dfrac{1}{5}\right)^{10} = 5^8 . (5^{-1})^{10} = 5^8 . 5^{-10} = 5^{8-10} = 5^{-2} = \dfrac{1}{25}$

e) $\left[2^2 . \left(\dfrac{1}{4}\right)^{-1}\right]^2 = [2^2 . (2^{-2})^{-1}]^2 = (2^2 . 2^2)^2 = (2^4)^2 = 2^8 = 256$

f) $2^{m-3} : 2^{m-2} = \dfrac{2^{m-3}}{2^{m-2}} = 2^{m-3-(m-2)} = 2^{-1} = \dfrac{1}{2}$

g) $\dfrac{3^{n+1} - 3^n}{3^n} = \dfrac{3^n . 3^1 - 3^n}{3^n} = \dfrac{\cancel{3^n} . (3^1 - 1)}{\cancel{3^n}} = 2$

7. $(2^3)^2$ e 2^{3^2} são iguais? Por quê?

8. Calcule

a) $3^{-7} \cdot 3^{9}$

b) $\dfrac{3 \cdot 2^{6}}{2^{4}}$

c) $\dfrac{2^{-5} \cdot 3^{2}}{2^{-4} \cdot 3^{-1}}$

d) $\left(\dfrac{1}{16}\right)^{2} \cdot 4^{3}$

e) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{4} \cdot \left(\dfrac{3}{2}\right)^{3} \cdot 3$

f) $\dfrac{5 \cdot \left(\dfrac{1}{5}\right)^{3}}{5^{-2}}$

g) $\dfrac{\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-1} \cdot (0{,}33\ldots)^{2}}{\left(\dfrac{3}{2}\right)^{2} \cdot 3^{-3}} + 1$

9. Simplifique as seguintes expressões:

a) $\dfrac{3^{m-1}}{3^{m-2}}$

b) $\dfrac{2^{n+2} - 2^{n+1}}{2^{n}}$

c) $\dfrac{5^{m+3} - 5^{m+2} - 5^{m+1}}{19 \cdot 5^{m}}$

d) $\dfrac{3 \cdot 2^{n+1} - 2^{n+2} + 4 \cdot 2^{n}}{3 \cdot 2^{n}}$

e) $\dfrac{7^{a+3} \cdot 7^{2a+1}}{(343)^{a+1}}$

10. Sendo $x = (2^{2})^{3}$, $y = 2^{2^{3}}$ e $z = 2^{3^{2}}$, calcule x.y.z.

11. Sendo $2^{p} = a$ e $4^{q} = b$, calcule 4^{p-q}.

12. Sendo $2^{x} + 2^{-x} = m$, calcule $4^{x} + 4^{-x}$.

13. Assinale V (Verdadeiro) ou F (Falso).

a) $10^{-8} + 10^{-9} = 1{,}1.10^{-8}$

b) $2{,}32 \cdot 10^{5} + 2{,}1 \cdot 10^{4} + 0{,}4 \cdot 10^{6} = 6{,}53 \cdot 10^{4}$

Solução:

a) $10^{-8} + 10^{-9} = 10^{-8} + 10^{-8} \cdot 10^{-1} = 10^{-8} \cdot (1+10^{-1}) = 10^{-8} \cdot (1+0{,}1) =$
$= 1{,}1 \cdot 10^{-8}$, (V)

b) $2{,}32 \cdot 10^{5} + 2{,}1 \cdot 10^{4} + 0{,}4 \cdot 10^{6} = 23{,}2 \cdot 10^{-1} \cdot 10^{5} + 2{,}1 \cdot 10^{4} + 40 \cdot 10^{-2} \cdot 10^{6}$
$= 23{,}2 \cdot 10^{4} + 2{,}1 \cdot 10^{4} + 40 \cdot 10^{4} = (23{,}2 + 2{,}1 + 40) \cdot 10^{4} = 65{,}3 \cdot 10^{4}$,(F)

14. Assinale V (Verdadeiro) ou F (Falso)

a) $0{,}0072 = 7{,}2 \cdot 10^{-3}$

b) $10^{-9} + 10^{-11} = 1{,}01 \cdot 10^{-9}$

c) $10^{-7} - 10^{-6} = 10^{-1}$

d) $10^{8} + 10^{-5} + 10^{-3} = 1$

e) $1{,}23 \cdot 10^{6} + 0{,}347 \cdot 10^{7} - 4{,}68 \cdot 10^{4} = 465{,}32 \cdot 10^{4}$

Prefixo

Na prática, utilizam–se potências de base 10 com denominações específicas mostradas na seguinte tabela:

Prefixo	Valor	Símbolo
atto	10^{-18}	a
femto	10^{-15}	f
pico	10^{-12}	p
nano	10^{-9}	n
micro	10^{-6}	μ
mili	10^{-3}	m
centi	10^{-2}	c
deci	10^{-1}	d
deca	10	da
hecto	10^{2}	h
quilo	10^{3}	*k*
mega	10^{6}	M
giga	10^{9}	G
tera	10^{12}	T
peta	10^{15}	P
exa	10^{18}	E

1.3 Raízes

Observe o cálculo das seguintes raízes:

$\sqrt{25} = 5$, pois $5>0$ e $5^2 = 25$

$\sqrt[4]{16} = 2$, pois $2>0$ e $2^4 = 16$

$\sqrt[3]{-8} = -2$, pois $(-2)^3 = -8$

$\sqrt[7]{0} = 0$, pois $0^7 = 0$

$\sqrt[5]{\frac{32}{243}} = \frac{2}{3}$, pois $\left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{32}{243}$

Nas raízes de índice par, o resultado é um número positivo, por exemplo: $\sqrt{25} = 5$ e não $\sqrt{25} = \pm 5$, pois o resultado negativo conduziria ao seguinte erro:

$\sqrt{25} = 5$, pois $5^2 = 25$

$\sqrt{25} = -5$, pois $(-5)^2 = 25$

Então $5 = -5$, o que é um absurdo.

Definição

Sendo n ($n \geq 2$) um número inteiro, chama-se raiz enésima de um número a o número b tal que $b^n = a$.

$\sqrt[n]{a} = b$

$\sqrt{\ }$ radical, **n** índice do radical,
a radicando e **b** raiz enésima de **a**.

Para n par e negativo não existe a raiz enésima de um número real, por exemplo, não existe $\sqrt{-9}$, pois nenhum número real elevado ao quadrado tem resultado igual a –9. Assim não existe $\sqrt[6]{-1}$, $\sqrt[8]{-256}$ etc.

1.4 Propriedades

Temos as seguintes propriedades dos radicais:

- $\sqrt[n]{a^n} = |a|$, para n par
- $\sqrt[n]{a^n} = a$, para n ímpar
- $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$
- $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, com $b \neq 0$
- $\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$
- $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[m.n]{a}$
- $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[np]{a^{mp}}$, $p \neq 0$

1.5 Potência de Expoente Racional

Comparando as igualdades:

$\sqrt[5]{a^{10}} = a^2$, pois $(a^2)^5 = a^{10}$

$a^{\frac{10}{5}} = a^2$, então

$\sqrt[5]{a^{10}} = 2^{\frac{10}{5}}$

De modo geral:

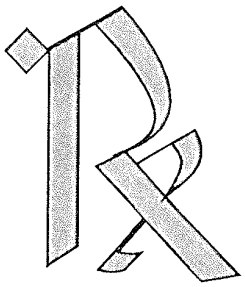
$$\boxed{\sqrt[q]{a^p} = a^{\frac{p}{q}}, \text{ com } a \in \mathbb{R},\ p \in \mathbb{Z} \text{ e } q \in \mathbb{N}^*}$$

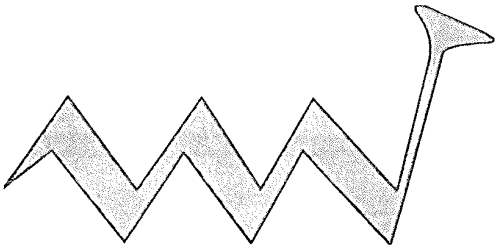
1.6 Propriedades

Também têm significado no campo real, potências como: $5^{-0,2}$, $3^{1,6}$, $(\sqrt{2})^{0,333...}$, $2^{\sqrt{2}}$, etc.

Os valores aproximados dessas potências são determinados através de estudo das funções exponenciais e logarítmicas.

Também são válidas as propriedades vistas anteriormente para as potências de expoente real.





O sinal de raiz quadrada

Esse sinal vem do latim **radix** (significando raiz) e foi usado pela primeira vez por **Leonardo de Pisa** em 1220. O sinal $\sqrt{\ }$ de hoje, que pode ser uma distorção da letra R, originou-se na Alemanha no século XVI.

O sinal de raiz cúbica

O símbolo acima, constituído por três sinais modernos de radical agrupados, foi inventado em 1525, pelo matemático alemão **Christoff Rudolf**. O sinal $\sqrt[3]{\ }$ hoje usado teve origem no século XVII, na França.

Extraído do livro: "As Matemáticas" de David Bergamini e os Redatores da Life - Livraria José Olímpio Editora - Rio de Janeiro

Exercícios:

15. Determine:

a) $\sqrt{36}$

b) $\sqrt[3]{27}$

c) $\sqrt[3]{-8}$

d) $-\sqrt[5]{1024}$

e) $\sqrt[7]{256}$

f) $\sqrt{\dfrac{16}{25}}$

g) $\sqrt[5]{\dfrac{1}{243}}$

h) $\sqrt[3]{\dfrac{-64}{125}}$

i) $\sqrt[4]{0{,}0001}$

16. Simplifique:

a) $\sqrt{8}$

b) $\sqrt[3]{625}$

c) $\sqrt[6]{64}$

d) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{27}$

e) $\sqrt[8]{64}$

f) $\sqrt[4]{(-2)^4}$

g) $\sqrt{720}$

h) $\sqrt[2]{32400}$

i) $\sqrt[3]{\sqrt[5]{\sqrt{256}}}$

j) $\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3}}}$

k) $\sqrt{10^2} - 8^2$

l) $\sqrt{50} + \sqrt{98} - \sqrt{392}$

m) $\left(\sqrt{\sqrt[3]{2\sqrt{2}}}\right)^8$

n) $\sqrt{13 + \sqrt{7 + \sqrt{2 + \sqrt{4}}}}$

17. Escreva na forma de um único radical as expressões:

a) $\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[6]{5}$

b) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[12]{3} \cdot \sqrt[4]{5} \cdot \sqrt{3}$

18. Resolva em IR as equações:

a) $x^2 - 512 = 0$

b) $x^3 + 81 = 0$

c) $x^4 - 2 \cdot \sqrt{2}\, x = 0$

d) $x^6 - 3 \cdot \sqrt{2}\, x^3 + 4 = 0$

19. Racionalize os denominadores:

a) $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$

b) $-\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$

c) $\dfrac{5}{\sqrt[5]{4}}$

d) $\dfrac{3}{\sqrt{2} - 1}$

e) $\dfrac{7}{\sqrt{5} - \sqrt{2}}$

f) $\dfrac{-\sqrt{2}}{2\sqrt{3} - \sqrt{2}}$

20. Calcule:

a) $9^{-\frac{1}{2}}$

b) $8^{\frac{2}{3}}$

c) $27^{-\frac{2}{3}}$

d) $\left(\dfrac{4}{9}\right)^{-\frac{1}{2}}$

e) $6^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{3}{5}} \cdot (\sqrt{2})^5$

f) $\dfrac{3^{-\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{2}}}{3^2 \cdot 3^{-\frac{1}{2}}}$

g) $\dfrac{\sqrt{8} \cdot \sqrt[4]{2}}{\sqrt[5]{16}}$

h) $\dfrac{81^{1.25} \cdot 243^{0.4}}{3^4}$

Capítulo 2

Função Exponencial

2.1 Equações Exponenciais

Equações onde a incógnita aparece nos expoentes das potências chamam–se equações exponenciais. São exemplos de equações exponenciais:

$2^{x+2} = 16$

$3^{x-1} + 3^{x+2} = 84$

$9^x - 2 \,.3^x - 3 = 0$

Para resolvermos uma equação exponencial, além de aplicarmos as propriedades das potências, basear-nos-emos na seguinte propriedade: duas potências de mesma base a, com $a>0$ e $a \neq 1$, são iguais se e somente se possuem expoentes iguais.

Simbolicamente, temos:

$$\boxed{\begin{array}{c} a^x = a^y \Leftrightarrow x = y \\ \text{com } 1 \neq a > 0 \end{array}}$$

Agruparemos as equações exponenciais em três tipos para facilitar sua resolução.

1º tipo: Equações com bases iguais

Exemplo 1

Resolver a equação $2^{x+2} = 16$.

Devemos decompor em potências de bases iguais:

$2^{x+2} = 2^4$

Eliminamos as bases e igualamos os expoentes:

$x + 2 = 4 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow S = \{2\}$

Exemplo 2

Resolver a equação $3^{x^2-5x+6} = 3^0$.

Decompondo em potências de bases iguais, temos:

$3^{x^2-5x+6} = 3^0$

Eliminando as bases e igualando os expoentes, temos:

$x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow x = 2$ ou $x = 3 \Rightarrow S = \{2,3\}$

Exercícios

21. Resolva as equações:

a) $3^x = 81$

b) $3^{2x} = 1$

c) $4^{x-1} = 32$

d) $5^{x-3} = \frac{1}{5}$

e) $2^{\frac{48}{x}} = 16$

f) $3^{2x} = \sqrt{27}$

g) $7^{2x} = \sqrt[3]{7}$

h) $9^{x-1} = 27^x$

i) $3.2^x = 48$

j) $\left(\frac{1}{9}\right)^{x-3} = 243$

k) $\left(\frac{5}{7}\right)^{x+1} = \left(\frac{7}{5}\right)^{2x}$

l) $\left(\frac{4}{25}\right)^{x+2} = \left(\frac{625}{16}\right)^{3x-1}$

22. Resolva as equações:

a) $3^{x^2-3x} = \frac{1}{9}$

b) $4^{x^2-x} = 1$

c) $2^{x^2+16} = (32^x)^2$

d) $2^{x+1} \cdot 4^{x-2} = 8^{2x-1}$

e) $\frac{3^{5x-7}}{9^{x+2}} = \sqrt[3]{3}$

f) $2^x \cdot 3^x = 36$

g) $6^{x-1} = 8\sqrt{2}$

h) $2^{2x} = 256$

i) $2^{2^x} = 256$

23. Resolva as equações:

a) $\sqrt{3^x \cdot \sqrt{3^{2x}}} = \frac{1}{27}$

b) $\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{x-2}{x-3}} = \sqrt{5^{3x-6}}$

c) $4^{x-1} = \frac{3^{2x}}{9}$

d) $7^{2x-3} = 8^{2x-3}$

e) $1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3^x - 1}} = -1$

f) $\sqrt{2^{x^2-x}} = \sqrt{4^x}$

2º tipo: Equações com fator comum

Exemplo 1:

Resolver a equação $3^{x-1} + 3^{x+2} = 84$

Colocando as potências em produtos de mesma base:

$3^x \cdot 3^{-1} + 3^x \cdot 3^2 = 84$

Colocando 3^x em evidência, temos:

$$3^x \cdot (3^{-1} + 3^2) = 84 \Rightarrow 3^x \cdot \left(\frac{1}{3} + 9\right) = 84 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3^x \cdot \frac{28}{3} = 84 \Rightarrow 3^x = \frac{84 \cdot 3}{28} \Rightarrow 3^x = 9 \Rightarrow 3^x = 3^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 2 \quad \Rightarrow \quad S = \{2\}$$

Exemplo 2

Resolver a equação $2^{x+1} + 2^x - 2^{x-1} = 5$, transformando as potências em produtos de mesma base:

$$2^x \cdot 2^1 + 2^x - 2^x \cdot 2^{-1} = 5$$

Colocando 2^x em evidência, temos:

$$2^x \cdot (2^1 + 1 - 2^{-1}) = 5 \quad \Rightarrow \quad 2^x \cdot \left(2 + 1 - \frac{1}{2}\right) = 5 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2^x \cdot \frac{5}{2} = 5 \quad \Rightarrow \quad 2^x = \frac{5 \cdot 2}{5} \quad \Rightarrow \quad 2^x = 2 \Rightarrow x = 1 \quad \Rightarrow \quad S = \{1\}$$

Exercícios

24. Resolva as equações exponenciais:

a) $3^x + 3^{x-1} = 4$

b) $2^{x-1} - 2^{x+2} = -56$

c) $3^{x+2} - 3^{x+1} + 3^x + 3^{x-1} + 3^{x-3} = 199$

d) $5^{x-2} + 5^{x-1} + 5^x + 5^{x+1} = \frac{156}{25}$

e) $\left(\frac{2}{3}\right)^{x} + \left(\frac{2}{3}\right)^{x-1} - \left(\frac{2}{3}\right)^{x+1} = \frac{44}{81}$

f) $2^{x+1} + 2^{x+2} + 2^{x+3} + 2^{x+4} + 2^{x+5} = 31$

25. Resolva a equação:

$2^{x+1} + 2^{x+2} + 2^{x+3} + 2^{x+4} = 5\,(3^{x+1} + 3^{x})$

Solução

$2^{x} \,.\, 2^{1} + 2^{x} \,.\, 2^{2} + 2^{x} \,.\, 2^{3} + 2^{x} \,.\, 2^{4} = 5\,(3^{x} \,.\, 3^{1} + 3^{x})$

$2^{x}\,(2^{1} + 2^{2} + 2^{3} + 2^{4}) = 5\,[3^{x}\,(3^{1} + 1)]$

$2^{x} \,.\, 30 = 3^{x} \,.\, 20$

$$\frac{2^{x}}{3^{x}} = \frac{20}{30} \Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{x} = \frac{2}{3} \Rightarrow x = 1 \Rightarrow S = \{1\}$$

26. Resolva as equações:

a) $3^{x-1} + 3^{x} + 3^{x+1} = \frac{13}{10} \,.\, (5^{x} + 5^{x-1})$

b) $2 \,.\, 3^{x} + 3^{x-1} - 3^{x+1} = -\frac{9}{10}\,(2^{x} - 2^{x-1} + 2^{x+1})$

c) $\frac{36}{5}\,[(\sqrt{2})^{x} + (\sqrt{2})^{x-2} - (\sqrt{2})^{x-4}] = (\sqrt{3})^{x} + (\sqrt{3})^{x+2}$

3º tipo: Equação com variável auxiliar

Exemplo 1

Resolva a equação $9^{x} - 2.3^{x} - 3 = 0$.

Fazendo $3^{x} = y$, devemos ter $y>0$. Então $9^{x} = (3^{2})^{x} = (3^{x})^{2} = y^{2}$. Substituindo 3^{x} por y e 9^{x} por y^{2} na equação original, temos:

$$y^2 - 2y - 3 = 0 \begin{cases} y_1 = -1 \text{ (não convém)} \\ y_2 = 3 \end{cases}$$

Assim $3^x = y$

$3^x = 3 \Rightarrow x = 1$

$S = \{1\}$

Exemplo 2

Resolva a equação $2^x + \dfrac{3}{2^x - 1} = 5$

Fazendo $2^x = y$, temos:

$$y + \frac{3}{y-1} = 5 \Rightarrow \frac{y\,.\,(y-1) + 3}{y-1} = 5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y^2 - y + 3 = 5\,.\,(y-1) \Rightarrow y^2 - 6y + 8 = 0 \begin{cases} y_1 = 2 \\ y_2 = 4 \end{cases}$$

Para $y = 2$ temos $2^x = 2 \Rightarrow x = 1$

Para $y = 4$ temos $2^x = 4 \Rightarrow x = 2$

$S = \{1,2\}$

Exercícios

27. Resolva as seguintes equações:

a) $4^x - 12.2^x + 32 = 0$

b) $3^{2x} - 12.3^x = -27$

c) $5^x - 5^{2-x} = -24$

d) $2^x + 2^{x-1} + 2^{2x} = 2(3+2^{x+1})$

e) $3^{\sqrt{4x}} - 4\,.\,3^{\sqrt{4x}} + 3 = 0$

f) $2^{x+1} - \dfrac{7}{2^{x-1}} + 2^{x-2} = \dfrac{1}{2^{x-2}}$

g) $4^{x^2+2} - 3 . 2^{x^2+3} = 160$

28) Resolva as seguintes equações:

a) $9^{x-\frac{1}{2}} - \dfrac{4}{3^{1-x}} = -1$

b) $\dfrac{2^m - 2^{-m}}{2^m + 2^{-m}} = \dfrac{7}{9}$

c) $\dfrac{3^x}{3^x - 1} - \dfrac{1}{3^x - 5} - \dfrac{7}{8} = 0$

d) $4^x + 6^x = 2.9^x$

29) Resolva os seguintes sistemas:

a) $\begin{cases} 2^x + 3^y = 11 \\ 2^x - 3^y = 5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 25^x . 125^y = \dfrac{1}{25} \\ 9^x . 27^{2y} = 3 \end{cases}$

Soluções

a) $\begin{cases} 2^x + 3^y = 11 \\ 2^x - 3^y = 5 \end{cases}$

Somando as duas equações, temos:

$2^x + 2^x = 11+5$

$2 . 2^x = 16 \Rightarrow 2^x = 8 \Rightarrow 2^x = 2^3 \Rightarrow x = 3$

Substituindo x = 3 na primeira equação vem:

$2^3 + 3^y = 11 \Rightarrow 3^y = 3 \Rightarrow y = 1$

logo: $S = \{(3,1)\}$

b) $\begin{cases} 25^x . 125^y = \dfrac{1}{25} \\ 9^x . 27^{2y} = 3 \end{cases}$

Preparando as bases, temos:

$$\begin{cases} 5^{2x} \cdot 5^{3y} = 5^{-2} \\ 3^{2x} \cdot 3^{6y} = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5^{2x+3y} = 5^{-2} \\ 3^{2x+6y} = 3^{1} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x + 3y = -2 \\ -2x + 6y = 1 \end{cases} \Rightarrow x = -\frac{5}{2} \text{ e } y = 1$$ errado

logo: $S = \left\{\left(-\frac{5}{2}, 1\right)\right\}$

30. Resolva os sistemas

a) $\begin{cases} 5^{x} + 7^{y} = 8 \\ 7^{y} - 5^{x} = 6 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3^{x+1} = 1 \\ \left(\frac{1}{9}\right)^{x} + 2^{y} = 25 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 9^{x} \cdot 27^{y} = \frac{1}{3} \\ 4^{x} \cdot 64^{y} = 4 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 9^{2x-1} = 81^{y} \\ 3^{x+1} = 27^{y} \end{cases}$

e) $\begin{cases} 2^{x} \cdot 3^{y} = 108 \\ 4^{x} \cdot 2^{y} = 128 \end{cases}$

2.2 Função Exponencial

Exemplo Introdutório

Certo tipo de vegetação dobra sua área mensalmente. Estando com uma área inicial de $1m^2$, vamos determinar a expressão analítica que exprime a área y (dada em m^2) em função do tempo x (dado em meses).

área inicial: $1m^2$

área após 1 mês: $2m^2$

área após 2 meses: $2^2\ m^2$

área após 3 meses: $2^3\ m^2$

área após 4 meses: $2^4\ m^2$

área após x meses: $2^x\ m^2$

então a expressão procurada é $\mathbf{y = 2^x}$.

Funções desse tipo são chamadas **exponenciais**.

Definição

Chama-se **função exponencial** de base **a**, a função $f(x) = a^x$, onde **a** é um número real positivo e diferente de um ($1 \neq a > 0$) definida para todo x real.

São exemplos de funções exponenciais:

- $y = 2^x$ → função exponencial de base 2.
- $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ → função exponencial de base $\frac{1}{2}$
- $y = (2,3)^x$ → função exponencial de base 2, 3
- $y = (\sqrt{3})^x$ → função exponencial de base $\sqrt{3}$
- $y = e^x$ → função exponencial de base e

Observações sobre a restrição de base

1º) A condicão $\mathbf{a > 0}$ garante a existência de $\mathbf{a^x}$ no campo real.

Se $\mathbf{a < 0}$, temos por exemplo:

$(-9)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-9}$ que não existe em $\mathbb{R}$.

2º) A condição $\mathbf{a} \neq 0$ e $\mathbf{a} \neq 1$ garante a igualdade de potências de mesma base não provenientes de expoentes diferentes.

Se $\mathbf{a} = 0$ ou $\mathbf{a} = 1$, temos por exemplo:

$0^3 = 0^6$ e no entanto $3 \neq 6$

$1^4 = 1^7$ e no entanto $4 \neq 7$

2.3 Representação Gráfica

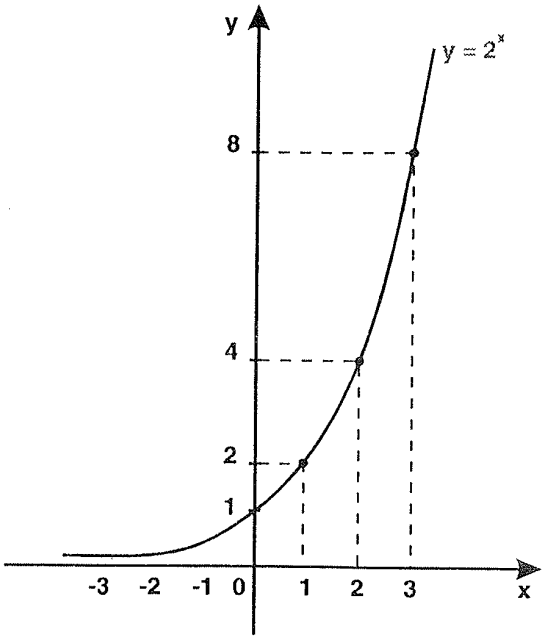
O gráfico da função exponencial apresenta-se de duas formas:

1ª) Quando a base é maior que um **(a > 1)**

Exemplo: gráfico da função $y = 2^x$.

Atribuindo valores a x, obtemos os valores de $y = 2^x$ e temos a seguinte representação gráfica:

x	$y = 2^x$
-3	1/8
-2	1/4
-1	1/2
0	1
1	2
2	4
3	8



Observe que:

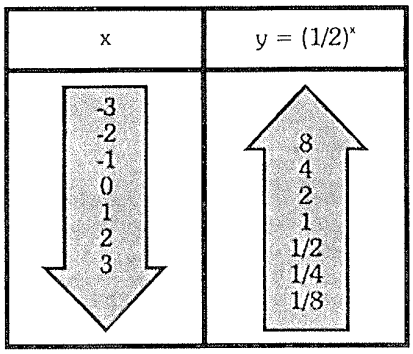
O domínio é IR e o conjunto imagem IR_+^*

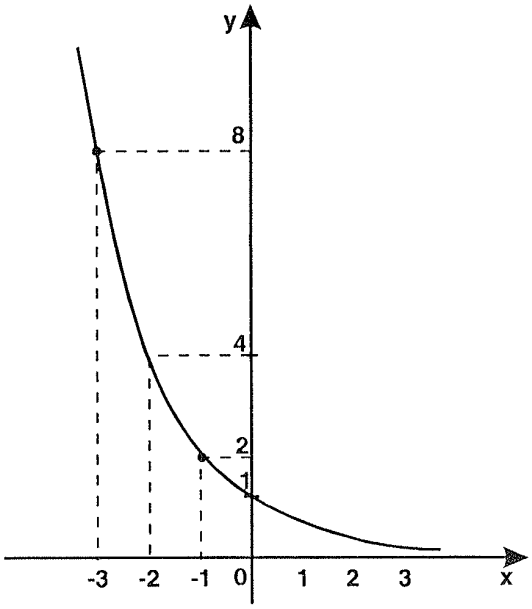
A função $y = 2^x$ é crescente em IR, pois aumentando x, os correspondentes valores de y aumentam.

2ª) Quando a base é menor que um e maior que zero **(0 < a < 1)**.

Exemplo: gráfico da função $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

Atribuindo valores a x, obtemos os valores de $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ e temos a seguinte representação gráfica:



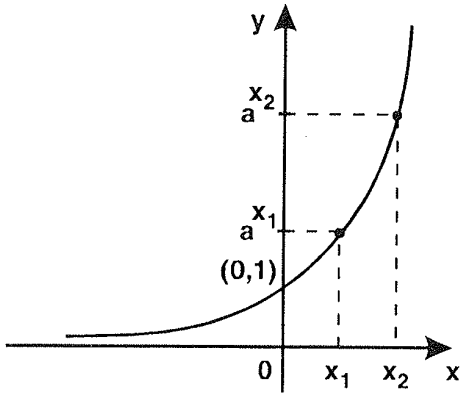
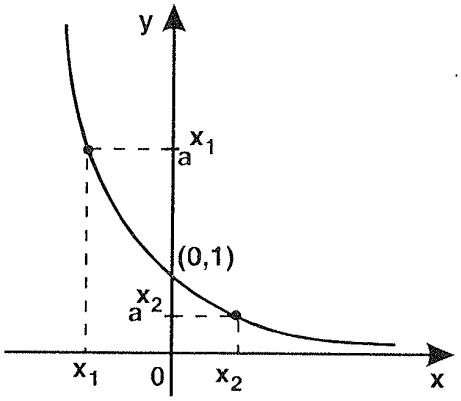


Observe que:

- O domínio é IR e o conjunto imagem IR_+^*
- A função $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ é decrescente em IR pois aumentando x, os correspondentes valores de y diminuem.

Gráfico da função $y = a^x$

O gráfico da função exponencial $y = a^x$ tem os seguintes aspectos:

$a > 1$: função crescente	$0 < a < 1$: função decrescente
	
$a^{x_1} < a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 < x_2$	$a^{x_1} > a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 < x_2$

Note que em ambos os casos, a curva intercepta o eixo y no ponto (0, 1)

Exercícios:

31. Classifique as funções em crescentes ou decrescentes:

a) $y = 3^x$

b) $y = \left(\frac{7}{4}\right)^x$

c) $y = (\sqrt{5})^x$

d) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

e) $y = \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^x$

f) $y = 4^{-x}$

g) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{-x}$

h) $y = \left(\frac{2}{3}\right)^{-x}$

i) $y = 2^{-2x}$

32. Para valores de k a função $f(x) = (2k - 6)^x$ é:

a) crescente

b) decrescente

33. Classifique as afirmações em V (Verdadeiro) ou F (Falso):

a) $2^3 > 2^6$

b) $3^{1,2} < 3^{1,6}$

c) $\left(\frac{1}{2}\right)^{0,2} > \left(\frac{1}{2}\right)^{0,3}$

d) $7^{\sqrt{3}} > 7^{\sqrt{2}}$

e) $\left(\frac{3}{4}\right)^{1,3} < \left(\frac{3}{4}\right)^{2,3}$

f) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-1} < 3$

g) $5^{-\frac{1}{2}} < 1$

h) $\left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{3}{2}} < \sqrt{\frac{2}{3}}$

34. Esboce o gráfico das seguintes funções:

a) $y = 3^x$

b) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

c) $y = 2^{x+1}$

d) $y = \left(\frac{3}{2}\right)^x$

e) $y = 2^{|x|}$

f) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}$

g) $y = e^x$

h) $y = \left|2^x - 2\right|$

35. Elabore num mesmo sistema cartesiano as funções:

a) $f(x) = 2^x$, $g(x) = 2^x - 1$, $h(x) = 2^x + 1$

b) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x - 2$, $h(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x + 2$

36. O crescimento de uma determinada população após t anos a partir de um instante t = 0 é dado por:

$$P(t) = P(0) \cdot 3^{0,25t}$$

onde P(t) indica a população no instante t. Após quanto tempo a população triplicará?

Solução:

P(0) é a população inicial, isto é, quando t = 0.

Do enunciado: P(t) = 3P(0).

Substituindo na expressão dada, vem:

$3P(0) = P(0) \cdot 3^{0,25t} \Rightarrow 3^{0,25t} = 3 \Rightarrow 0,25t = 1 \Rightarrow t = 4$ anos

37. Um automóvel vale atualmente R$ 10.000,00 e desvaloriza 10% ao ano. A expressão v(t) que dá o valor do automóvel após t anos é dada por:

$$V(t) = 10.000 \cdot \left(1 - \frac{10}{100}\right)^t \quad \text{ou } V(t) = 10\,000 \cdot (0{,}9)^t$$

Pede-se:

a) Qual o valor do automóvel para t = 4 anos?

b) Após quanto tempo o automóvel valerá R$ 8.100,00?

c) Após 3 anos quanto o carro desvalorizou?

38. Um empregado está executando a sua tarefa com mais eficiência a cada dia. Suponha que $N = 640\,(1-2^{-0,5t})$ seja o número de unidades fabricadas por dia por esse empregado, após t dias do início do processo de fabricação. Se, para $t = t_1$ e N = 635, determine t_1.

39. A lei de decomposição do radium no tempo $t \geq 0$ é dada por $M(t) = C.e^{-kt}$, onde M(t) é a quantidade de radium no tempo t; C, k são constantes positivas. Se a metade da quantidade primitiva M(0) desaparece em 1600 anos, qual a quantidade perdida em 100 anos?

40. No crescimento exponencial $f(t) = c.e^{kt}$, verifique que o valor da função no ponto médio de um intervalo qualquer é média geométrica dos valores nos extremos desse intervalo.

Solução.

Seja t_M o ponto médio do intervalo de extremos t_1 t_2. Então $t_M = \dfrac{t_1 + t_2}{2}$

Devemos verificar que $f(t_M) = \sqrt{f(t_1) \cdot f(t_2)}$

A média geométrica entre dois números não negativos a e b é $\sqrt{ab}$

Temos: $f(t_1) = c\,.e^{kt_1}$ e $f(t_2) = c\,.e^{kt_2}$

Então:

$$\sqrt{f(t_1).f(t_2)} = \sqrt{ce^{kt_1}.\,ce^{kt_2}} = \sqrt{c^2.e^{kt_1 + kt_2}} = c\sqrt{e^{k(t_1+t_2)}}$$

$$f(t_M) = c.e^{k\frac{t_1+t_2}{2}} = c.[e^{k(t_1+t_2)}]^{\frac{1}{2}} = c.\sqrt{e^{k(t_1+t_2)}} \Rightarrow f(t_M) = \sqrt{f(t_1)\,.\,f(t_2)}$$

portanto:

$$f(t_M) = \sqrt{f(t_1).f(t_2)}$$

41. A população mundial em 1950 era de 2,6 bilhões e em 1975 era de 4 bilhões. Admitindo o crescimento exponencial, estime a população no ano 2000, usando a conclusão do exercício anterior.

2.4 Inequações Exponenciais

Inequações onde a incógnita aparece nos expoentes das potências chamam-se inequações exponenciais. São exemplos de inequações exponenciais:

- $2^{x+1} > \frac{1}{8}$
- $\left(\frac{1}{3}\right)^{x-2} \leq \left(\frac{1}{9}\right)^{x}$

Para resolvermos uma inequação exponencial, convém lembrarmos que:

1º) Se a função $y = a^x$ é crescente, então

$a > 1$	$a^{x_1} < a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 < x_2$

2º) Se a função $y = a^x$ é decrescente, então

$0 < a < 1$	$a^{x_1} > a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 < x_2$

Exercícios

42. Resolver as inequações:

a) $2^{x+1} > \frac{1}{8}$ b) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x-2} \leq 27^x$

Solução

a) $2^{x+1} > \frac{1}{8}$

Decompondo em potências de bases iguais:

$2^{x+1} > 2^{-3}$

Como a base é maior que 1, temos:

$x + 1 > -3 \Rightarrow x > -4$

$S = \{ x \in IR \mid x > -4\}$

Base > 1, conserva o sentido da desigualdade para os expoentes.

b) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x-2} \leq \left(\frac{1}{9}\right)^{x}$

Decompondo em potências de bases iguais:

$\left(\frac{1}{3}\right)^{x-2} \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{2x}$

Como a base está entre 0 e 1, temos:

$x - 2 \geq 2x \Rightarrow x \leq -2$

$S = \{x \in IR \mid x \leq -2\}$

0 < base < 1, inverte o sentido da desigualdade para os expoentes.

Exercícios

43. Resolva as inequações:

a) $3^{1-x} < \frac{1}{81}$

b) $2^{x^2} \geq 2^{16}$

c) $\left(\frac{1}{4}\right)^{x+2} < \left(\frac{1}{4}\right)^{5x-1}$

d) $(0{,}8)^{4x^2-x} > (0{,}8)^{3(x+1)}$

e) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-4} \leq 8^{x+2}$

f) $(\sqrt[5]{11})^{x^2+x+1} < 1$

g) $4^x < \frac{8}{\sqrt[5]{2}}$

h) $2^{4x-1} \geq \frac{1}{2^{1-x}}$

i) $81 \leq 3^{x+1} < 243$

44. Resolva a equação: $2^{2x+1} - 9.2^{x+1} < -16$

Solução

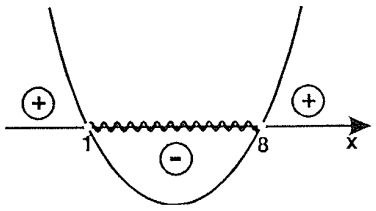
Podemos escrever a equação da seguinte forma:

$2^{2x}.2 - 9.2^x.2+16 < 0$

Fazendo $2^x = y$, temos:

$2y^2 - 18y + 16 < 0$

Resolvendo a inequação temos:



$1 < y < 8 \Rightarrow 1 < 2^x < 8 \Rightarrow 2^0 < 2^x < 2^3 \Rightarrow 0 < x < 3$

$S = \{ x \in IR \mid 0 < x < 3 \}$

44. Resolva as inequações:

a) $3^{2x+1} - 10.3^{x} + 3 \leq 0$

b) $2^{2x+2} - 5.2^{x+2} + 16 > 0$

c) $3^{2-x} + 3^{x+2} > 18$

d) $2^{x} - 2 \leq 8 \,.\, 2^{-x}$

e) $2^{2x+2} - 0{,}75 \,.\, 2^{x+2} < 1$

45. Determine o domínio das seguintes funções:

a) $f(x) = \sqrt{2^{x} - 8}$ ≥ 0

b) $f(x) = \dfrac{x-2}{\sqrt[3]{2^{x} - 4}}$

c) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{4^{x+2} - 4^{-x}}}$

d) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{16} - 2^{-x}}}$

e) $f(x) = \left|3^{2x} - 1\right|$

f) $f(x) = \sqrt{2^{2x} - 2^{x}}$

$2^{x} - 2^{3} \geq 0$

$2^{x} \leq 2^{3}$

$x \leq 3$

$2^{x} \geq 2^{3}$

$x \geq 3$

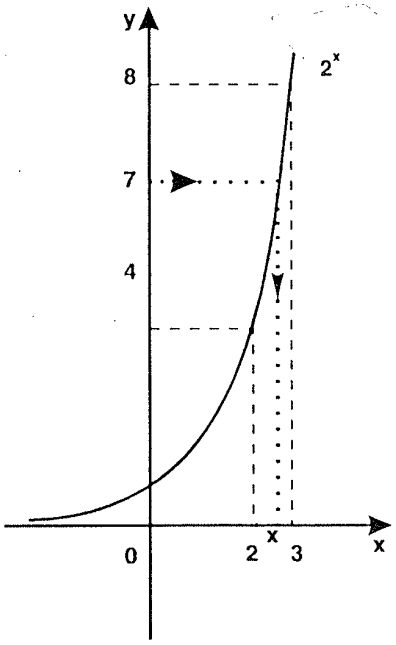
Capítulo 3

Função Logarítmica

3.1 Introdução

Consideremos a seguinte equação: $2^x = 7$

Torna–se impossível nesta igualdade, obter potências de mesma base, mas sabemos que existe um valor real de x que satisfaz esta equação, como mostra o seguinte gráfico:



Verificamos então que x está compreendido entre 2 e 3. Para determiná-lo com uma certa aproximação, utilizamos a teoria dos logaritmos.

Com o desenvolvimento da Navegação e da Astronomia, muitos matemáticos ocuparam-se em estudar um processo para simplificar cálculos longos e trabalhosos acarretados por esta evolução.

Os logaritmos foram inventados por um rico proprietário rural escocês, **John Napier** (1550–1617). O nome "logaritmo", é a junção de duas palavras gregas "logos" e "arithmos" que significam respectivamente "razão" e "número". Em 1614, Napier publica o livro *Mirifici logarithmorum canonis descriptio* (uma descrição da maravilhosa regra dos logaritmos). O matemático inglês **Henry Briggs** (1561–1631) ao tomar conhecimento dos trabalhos de Napier, foi em sua casa na Escócia para discutir possíveis modificações no método dos logaritmos, propondo o uso de potências de base 10, já cogitada por Napier. Após a morte de Napier, Briggs ficou com a tarefa de construir a primeira tabela de logaritmos decimais, publicando–a em 1619.

Foram desenvolvidas ao mesmo tempo idéias muito semelhantes à de Napier, na Suíca por **Jobst Bürg** (1552–1632).

A invenção dos logaritmos teve um tremendo impacto na estrutura da Matemática e na época, solucionou os problemas da Navegação e Astronomia.

Com o advento das calculadoras eletrônicas, as tábuas de logaritmos caíram em desuso, mas os logaritmos continuam sendo muito importantes em diversas áreas do conhecimento humano.

Definição

Dados dois números reais positivos **a** e **b** com **a** $\neq 1$, chama–se logaritmo de b na base a, o expoente x que satisfaz a igualdade $\mathbf{a^x = b}$.

Indicamos: $x = \log_a b$

Então, para $1 \neq a > 0$ e $b > 0$, temos

$$\boxed{\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b}$$

Exemplos

$\log_2 8 = 3$, pois $2^3 = 8$

$\log_{\frac{1}{4}} 16 = -2$, pois $\left(\frac{1}{4}\right)^{-2} = 16$

$\log_7 7 = 1$, pois $7^1 = 7$

$\log_{10} 1 = 0$, pois $10^0 = 1$

$\log_2 \sqrt[3]{2} = \frac{1}{3}$, pois $2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}$

Nomenclatura

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{logaritmando} \\ \uparrow \\ \log_a b = x \longrightarrow \text{logaritmo} \\ \downarrow \\ \text{base} \end{array}}$$

O número real **b** também é chamado de **antilogaritmo** de x na base a.

$$\boxed{b = \text{antilog}_a x}$$

Observações

Para que exista $\log_a b$, devemos ter as seguintes condições:

$$\boxed{b > 0 \text{ e } 1 \neq a > 0}$$

para garantir a existência e a unicidade do expoente x na igualdade $a^x = b$.

Assim, **não existe**, em IR:

$\log_2 -8, \log_3 0, \log_1 3, \log_0 7, \log_{-\frac{1}{3}} 5$, etc

Conseqüências

Da definição de logaritmos são imediatas as seguintes conseqüências para $\mathbf{1 \neq a > 0, b > 0, c > 0}$ e $m \in \mathbb{R}$:

1º) $\log_a 1 = 0$	4º) $\log_{a^m} a = \frac{1}{m}$
2º) $\log_a a = 1$	5º) $a^{\log_a b} = b$
3º) $\log_a a^m = m$	6º) $\log_a b = \log_a c \Leftrightarrow b = c$

Exercícios:

47. Escreva as igualdades a seguir usando logaritmos:

a) $2^4 = 16$

b) $3^2 = 9$

c) $7^{-2} = \frac{1}{49}$

d) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = 9$

e) $\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$

f) $(0,1)^3 = 0,001$

g) $(\sqrt{2})^3 = 2\sqrt{2}$

h) $(0,33)^0 = 1$

48. Para que valor de x, tem-se

a) $\log_2 \frac{1}{8} = x$

b) $\log_{3^{-1}} x = 3$

c) $\log_x 25 = 2$

d) $\log_3 (x + 1) = -1$

e) $\log_{\sqrt{5}} (x^2 - 3x - 9) = 0$

f) $\log_7 \frac{1 - 2x}{x} = \log_7 6$

Solução

a) $x = \log_2 \frac{1}{8} \Rightarrow 2^x = \frac{1}{8} \Rightarrow 2^x = 2^{-3} \Rightarrow x = -3$

b) $\log_{27} x = \frac{1}{3} \Rightarrow 27^{\frac{1}{3}} = x \Rightarrow x = (3^3)^{\frac{1}{3}} \Rightarrow x = 3$

c) $\log_x 25 = 2 \Rightarrow x^2 = 25 \Rightarrow x = \pm 5$

como $1 \neq x > 0$, então $x = 5$

d) $\log_3 (x+1) = -1 \Rightarrow 3^{-1} = x+1 \Rightarrow x = \frac{1}{3} - 1 \Rightarrow x = -\frac{2}{3}$

e) $\log_{\sqrt{5}} (x^2 - 3x - 9) = 0 = (\sqrt{5})^0 = x^2 - 3x - 9 \Rightarrow 1 = x^2 - 3x - 9 \Rightarrow$

$x^2 - 3x - 10 \begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = 5 \end{cases}$

f) $\log_7 \frac{1-2x}{x} = \log_7 6 \Rightarrow \frac{1-2x}{x} = 6 \Rightarrow 1 - 2x = 6x \Rightarrow 8x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{8}$

49. Determine x nos seguintes casos:

a) $\log_{\frac{1}{27}} 3 = x$

b) $\log_2 (2x) = -1$

c) $\log_x 16 = 2$

d) $\log_4 (2x - 5) = 2$

e) $\log_{\sqrt{2}} (-x^2 + 3x + 5) = 0$

f) $\log_5 \frac{x-1}{3} = \log_5 \frac{3x-3}{x-7}$

50. As indicações R_1 e R_2, na escala Richter, de dois terremotos estão relacionadas pela fórmula

$$R_1 - R_2 = \log\left(\frac{M_1}{M_2}\right)$$

onde M_1 e M_2 medem a energia liberada pelos terremotos sob a forma de ondas que se propagam pela crosta terrestre.

Houve dois terremotos: um correspondente a $R_1 = 8$ e outro correspondente a $R_2 = 6$. Determine a razão entre M_1 e M_2.

51. Determine os valores de x para que existam os logaritmos:

a) $\log(2x+8)$

b) $\log_{(3x-2)} 5$

c) $\log_{(x-1)} (x^2 - x - 6)$

Solução

a) $\log (2x + 8)$

Sendo a base 10 e $1 \neq 10 > 0$, devemos determinar a condição de existência do logaritmo, isto é:

$2x + 8 > 0 \Rightarrow x > -4$, portanto:

$S = \{x \in IR \mid x > -4\}$

Existe $\log_a b$
se: $b > 0$ e $1 \neq a > 0$

b) $\log_{(3x-2)} 5$

Sendo o logaritmando 5 e 5>0, devemos determinar a condição de existência da base, isto é:

$$\begin{cases} 3x - 2 > 0 \Rightarrow x > \dfrac{2}{3} \\ 3x - 2 \neq 1 \Rightarrow x \neq 1 \end{cases}$$

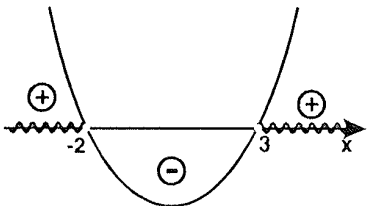
Fazendo a intersecção dessas duas condições, temos:

$$S = \left\{ x \in IR \mid x > \frac{2}{3} \text{ e } x \neq 1 \right\}$$

c) $\log_{(x-1)} (x^2 - x - 6)$

Condição de existência do logaritmando:

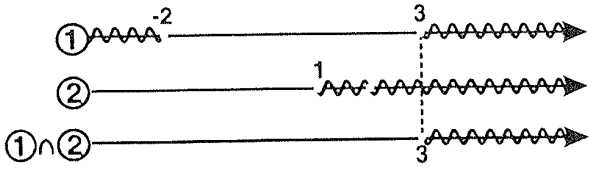
$x^2 - x - 6 > 0$



Condição de existência da base:

$$\begin{cases} x - 1 > 0 \Rightarrow x > 1 \ (1) \\ x - 1 \neq 1 \Rightarrow x \neq 2 \ (2) \end{cases}$$

Fazendo a intersecção de (1) e (2) vem:



logo: $S = \{x \in IR \mid x > 3\}$

52. Determine os valores de x para que existam os seguintes logaritmos:

a) $\log_3 (x + 2)$

b) $\log_{(2x-6)} \sqrt{5}$

c) $\log_{(2-x)} (-x^2 + 3x + 4)$

d) $\log(|x|-2)$

e) $\log_{(x+3)} \left(\dfrac{x-1}{2+x}\right)$

f) $\log_{(3x-9)} (4^x - 1)$

53. Qual a condição para que $\log_a [a(x^2 - 1)]$ seja um número real?

3.2 Sistemas de Logaritmos

O conjunto de todos os logaritmos dos números reais positivos na base a $(0 < a \neq 1)$ chama-se sistema de logaritmo de base a.

O conjunto a seguir, representa o sistema de logaritmos de base 2.

$\{\ldots, \log_2 0{,}3; \ldots; \log_2 7; \ldots; \log_2 25; \ldots\}$

São importantes os seguintes sistemas de logaritmos:

1º) Sistema de logaritmos decimais

É o sistema de logaritmos cuja base é 10.

Henry Briggs mostrou a vantagem de se utilizar os logaritmos na base 10.

Para $x > 0$, indica-se $\log_{10} x$ também por $\log x$.

Então

$$\log_{10} x = \log x$$

2º) Sistema de logaritmos neperianos

É o sistema de logaritmos de base e, onde e é o número irracional 2,71828...

O nome neperiano é atribuído ao matemático **John Neper**.

Para $x > 0$, indica-se $\log_e x$ também por $\ln x$.

$$\boxed{\log_e x = \ln x}$$

Os logaritmos neperianos, também chamados de naturais, são bastante utilizados na área técnica e na Análise Matemática.

Nas calculadoras científicas, aparecem duas teclas para cálculo de logaritmos: logx e lnx.

Exercícios

54. Resolva a equação

$e^{\ln(x+1)} = 5$

Solução:

$e^{\log_e (x+1)} = 5 \Rightarrow x + 1 = 5 \Rightarrow x = 4$

portanto $S = \{4\}$

55. Resolva as equações

a) $e^{\ln(5x-1)} = 9$

b) $e^{\ln\left(\frac{x-1}{x}\right)} = 3$

c) $e^{1+2\ln x} = 4e$

d)

56. A população de uma cidade é dada por $P = P_0 . e^{kt}$, onde P_0 é o número de habitantes no instante $t = 0$ e $k \in IR$. Sendo a população no instante $t=30$ o dobro da inicial, obtenha k. Dado $\ln 2 = 0{,}693$.

3.3 Propriedades

As propriedades operatórias seguintes facilitam os cálculos numéricos empregando logaritmo.

Admitindo válidas as condições de existência ($1 \neq$ base > 0 e logaritmando > 0), temos as seguintes propriedades:

1ª) Logaritmo do Produto

O logaritmo do produto é igual à soma dos logaritmos dos fatores deste produto.

$$\boxed{\log_a (bc) = \log_a b + \log_a c}$$

De fato:

Fazendo

$\log_a b = x \Rightarrow a^x = b$ (1)

$\log_a c = y \Rightarrow a^y = c$ (2)

Devemos provar então que $\log_a bc = x + y$.

Multiplicando (1) e (2), temos:

$a^x . a^y = bc \Rightarrow a^{x+y} = bc$

Aplicando a definição de logaritmo, vem:

$\log_a (bc) = x + y$

Exemplos:

$\log_3 (9.27) = \log_3 9 + \log_3 27 = 2+3=5$

$\log_2 (32.8.64) = \log_3 32 + \log_2 8 + \log_2 64 = 5+3+6=14$

$\log_5 2 + \log_5 2 + \log_5 7 = \log_5 (2.3.7) = \log_5 42$

Não faça o seguinte erro:

log(7+2) = log7 + log2

pois:

log (7+2) = log9, e

log7 + log2 = log(7.2) = log14

2ª) Logaritmo do Quociente

O logaritmo do quociente é igual à diferença entre o logaritmo do dividendo e o logaritmo do divisor

De fato

$$\boxed{\log_a \left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c}$$

Fazendo $\log_a b = x \Rightarrow a^x = b$ (1)

$\log_a c = y \Rightarrow a^y = c$ (2)

Devemos provar então que $\log_a \frac{b}{c} = x - y$

Dividindo (1) por (2)

$$\frac{a^x}{a^y} = \frac{b}{c} \Rightarrow a^{x-y} = \frac{b}{c}$$

Aplicando a definição de logaritmos vem:

$$\log_a\left(\frac{b}{c}\right) = x - y$$

Exemplos:

$$\log_5\left(\frac{2}{3}\right) = \log_5 2 - \log_5 3$$

$$\log_2 7 - \log_2 4 = \log_2 \frac{7}{4}$$

$$\log_2\left(\frac{1}{3}\right) = \log_2 1 - \log_2 3 = -\log_2 3$$

$$\log\left(\frac{4.9}{7}\right) = \log(4.9) - \log 7 = \log 4 + \log 9 - \log 7$$

Conseqüência

$\log_a\left(\frac{1}{b}\right) = \log_a 1 - \log_a b = -\log_a b$, então:

$$\boxed{\log_a\left(\frac{1}{b}\right) = -\log_a b}$$

Cologaritmo

Chama-se cologaritmo de um número real positivo numa certa base **a** **(1 ≠ a > 0)**,o oposto do logaritmo desse número nesta mesma base.

$$\boxed{\text{colog}_a x = -\log_a x}$$

Exemplo

$-\log_3 2 = \text{co}\log_3 2$

3ª) Logaritmo da Potência

1º caso – Potência no logaritmando.

O logaritmando da potência é igual ao produto do expoente pelo logaritmo da base da potência

$$\boxed{\log_a b^{\alpha} = \alpha \,.\, \log_a b, \quad \text{com } \alpha \in \mathbb{R}^*}$$

$\log_a b^{\alpha} = \alpha \log_a b$, com $\alpha \in \mathbb{R}$

De fato:

Fazendo

$\log_a b^{\alpha} = x \Rightarrow a^x = b^{\alpha}$ (1)

e

$\log_a b = y \Rightarrow a^y = b$ (2)

Devemos provar então que $x = \alpha \,.\, y$

Substituindo (2) em (1), temos:

$a^x = (a^y)^{\alpha} \Rightarrow a^x = a^{\alpha y} \Rightarrow x = \alpha . y$

Exemplos

$\log_3 3^5 = 5 . \log_3 3 = 5$

$\log_5 \sqrt{2} = \log_5 2^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \log_5 2$

$\log_2 128 = \log_2 2^7 = 7 \log_2 2 = 7$

2º caso - Potência na base

O logaritmo cuja base é uma potência é igual ao produto do inverso do expoente da base pelo logaritmo dessa base.

$$\boxed{\log_{a^\beta} b = \frac{1}{\beta} \log_a b, \quad \text{com } \beta \in \mathbb{R}^*}$$

De fato:

Fazendo

$$\log_{a^\beta} b = x \Rightarrow (a^\beta)^x = a^{\beta x} = b \qquad (1)$$

$$\log_a b = y \Rightarrow a^y = b \qquad (2)$$

Devemos provar então que $x = \frac{1}{\beta} . y$. Como (1) = (2), temos:

$$a^{\beta x} = a^y \Rightarrow \beta . x = y \Rightarrow x = \frac{1}{\beta} . y$$

Exemplos:

- $\log_{2^3} 2 = \frac{1}{3} \log_2 2 = \frac{1}{3}$

- $\log_{\sqrt{3}} 5 = \log_{3^{\frac{1}{2}}} 5 = \frac{1}{\frac{1}{2}} \log_3 5 = 2 \log_3 5$

- $\log_{625} 5 = \log_{5^4} 5 = \frac{1}{4} \log_5 5 = \frac{1}{4}$

Exercícios

57. Decomponha os logaritmos a seguir, utilizando as propriedades

a) $\log_5 (8.3)$

b) $\log_2 (5.7.9)$

c) $\log \frac{2}{3}$

d) $\log 1{,}33$

e) $\log_3 \frac{4\pi}{9}$

f) $\log_7 5^2$

g) $\log_{3^8} 2$

h) $\log_9 243$

i) $\log_4 72$

j) $\log_9 \frac{81}{1024}$

58. Se $\log 2 = 0{,}30$ e $\log 3 = 0{,}47$ calcule

a) $\log 6$

b) $\log 5$

c) $\log 15$

d) $\log 72$

e) $\log 25$

f) $\log_{100} \sqrt{2}$

g) $\log_{\sqrt{10}} 12$

h) $\log_{\frac{1}{10}} \sqrt[3]{1{,}5}$

59. Sendo $\log_m 2 = a$ e $\log_m 3 = b$, determine $\log_m \frac{64}{2{,}7} - \log_m 60$ em função de a e b.

60. Sendo a, b e c números reais positivos, escreva na base 2 o desenvolvimento logarítmico da expressão:

$$x = \frac{\sqrt[3]{a}.b^2}{\sqrt{c}}$$

Solução

Temos:

$$\log_2 x = \log_2 \frac{\sqrt[3]{a}\,.\,b^2}{\sqrt{c}} = \log_2(\sqrt[3]{a}.b^2) - \log_2 \sqrt{c} =$$

$$= \log_2 a^{\frac{1}{3}} + \log_2 b^2 - \log_2 c^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}\,.\,\log_2 a + 2\log_2 b - \frac{1}{2}\log_2 c$$

61. Sendo a, b, c e d números reais positivos, escreva na base 10 o desenvolvimento logarítmico das seguintes expressões:

a) $x = \sqrt{a}\,.\,b^2\,.\,c$

b) $x = \dfrac{a\,.\sqrt{b}}{c^3}$

c) $x = \dfrac{a\,.\sqrt{bc}}{d}$

d) $y = \dfrac{a^3\,.\,\sqrt{b}}{\sqrt[3]{c}\,.\,d}$

e) $y = \sqrt{\dfrac{a\sqrt{b}}{cd}}$

f) $y = \dfrac{\sqrt[5]{a}\,.(b+c)}{200d}$

62. Determine a expressão cujo logaritmo decimal é:

a) $\log x = \dfrac{1}{3}[\log[(b+c) + \log(b-c) - 2\log b + 1]$

b) $\log_5 A = 2.\log_5 \ell + \dfrac{1}{2}\log_5 3 - 2\log_5 2$

c) $\log_3 V = -1 + \log_3 \pi + 2\log_3 r + \log_3 h$

63. Aumentando um número x de 16 unidades, seu logaritmo na base 3 aumenta de duas unidades. Calcule x.

Solução

Do enunciado vem:

$$\log_3(x+16) = 2 + \log_3 x$$

$$\log_3(x+16) = \log_3 3^2 + \log_3 x$$

$$\log_3(x+16) = \log_3(9x) \Rightarrow x+16 = 9x \Rightarrow x = 2 \Rightarrow S = \{2\}$$

64. Determine dois números positivos cuja soma é 5, tais que a soma de seus logaritmos na base 6 é igual a 1.

65. A diferença dos logaritmos na base 2 de dois números a e b, nesta ordem é 1. Determine esses números sendo o seu produto 8.

66. O pH de uma solução é definido por $pH = \log\left(\frac{1}{H^+}\right)$, onde H^+ é a concentração de hidrogênio em forma de íons–grama por litro de solução. Determine o pH de uma solução onde $H^+ = 1{,}0 \cdot 10^{-8}$.

67. Sejam x e y números reais positivos, mostre que a igualdade $\log(x+y) = \log x + \log y$ é verdadeira se e somente se: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1$.

68. Resolva as equações:

a) $\log_2(x+1) + \log_2(x-5) = 4$

b) $\log_2 \frac{x-1}{x+2} + \log_2 x = -1$

Solução

a) $\log_2(x+1) + \log_2(x-5) = 4$

Devemos inicialmente garantir a existência dos logaritmos. Assim:

$$\begin{cases} x+1 > 0 \Rightarrow x > -1 \\ x-5 > 0 \Rightarrow x > 5 \end{cases} \Rightarrow \quad x > 5$$

Aplicando a propriedade do produto, temos:

$$\log_2(x+1)(x-5) = 4 \quad \Rightarrow \quad (x+1)(x-5) = 16 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - 4x - 21 \begin{cases} x_1 = -3 \text{ (não convém)} \\ x_2 = 7 \end{cases}$$

portanto: $S = \{7\}$

b) $\log_2 \frac{x-1}{x+2} + \log_2 x = -1$

Também podemos garantir a existência dos logaritmos verificando as soluções encontradas:

Temos:

$$\log_2 \left(\frac{x-1}{x+2}\right) \cdot x = \frac{1}{2} \Rightarrow \left(\frac{x-1}{x+2}\right) \cdot x = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{x^2-x}{x+2} = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 3x - 2 = 0 \begin{cases} x_1 = -\dfrac{1}{2} \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

Verificando vem:

- para $x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \log_2 x = \log_2\left(-\frac{1}{2}\right)$ que não existe, então $x = -\frac{1}{2}$ não convém

- para $x = 2 \Rightarrow \log_2 \frac{x-1}{x+2} = \log_2 \frac{1}{4}$ e $\log_2 x = \log_2 2$, logo $x = 2$ é solução.

portanto $S = \{2\}$

69. Resolva as equações:

a) $\log x = 1 + \log 3$

b) $\log_2 (x^2 - 1) = 3$

c) $\log (x+3) = \log 2x + \log 5$

d) $\log_2 (x + 2) + \log_x (x - 2) = 3$

e) $\log_4 \sqrt{x+1} + \log_4 2 = \log_4 (2x - 2)$

70. Resolva a equação $\log_2^{(3x+7)} - \log_2^{(x^2-1)} = 1$

Solução

Aplicando a propriedade do quociente, temos:

$$\log_2 \frac{3x+7}{x^2-1} = 1 \Rightarrow \frac{3x+7}{x^2-1} = 2 \Rightarrow$$

$$3x + 7 = 2x^2 - 2 \Rightarrow 2x^2 - 3x - 9 = 0 \begin{cases} x_1 = -\dfrac{3}{2} \\ x_2 = 3 \end{cases}$$

Verificando vem:

$$\text{para } x = -\frac{3}{2} \begin{cases} \log_2 (3x+7) = \log_2 \left[3\left(-\dfrac{3}{2}\right)+7\right] = \log_3 \dfrac{5}{2} \\ \log_2 (x^2-1) = \log_2 \left(\dfrac{9}{4} - 1\right) = \log_2 \dfrac{5}{4} \end{cases}$$

$$\text{para } x = 3 \begin{cases} \log_2 (3x+7) = \log_2 (3.3+7) = \log_2 16 \\ \log_2 (x^2-1) = \log_2 (3^2-1) = \log_2 8 \end{cases}$$

Como os logaritmos existem, então $-\dfrac{3}{2}$ e 3 são soluções

$$S = \left\{-\frac{3}{2}, 3\right\}$$

71. Resolva as equações

a) $\log_2 (2x+3) - \log_2 (x-1) = 3$

b) $\log (x^2 - 3x + 2) - \log (x - 2) = \log (8 - 2x)$

c) $\log_3 (x+2) + \text{co}\log_3 (5x-7) = \log_3 \left(x - \dfrac{2}{3}\right)$

72. Resolva a equação $\log^2_2 x - \log_2 x^2 - 8 = 0$

Solução

Devemos ter $x > 0$

Aplicando a propriedade da potência, vem:

$$\log_2^2 x - 2\log_2 x - 8 = 0$$

Fazendo $\log_2 x = y$ $\begin{cases} y_1 = -2 \\ y_2 = 4 \end{cases}$

$$y^2 - 2y - 8 = 0$$

Então:

$$\log_2 x = -2 \Rightarrow x = \frac{1}{4}$$

$$\log_2 x = 4 \Rightarrow x = 16$$

Portanto:

$$S = \left\{\frac{1}{4}, 16\right\}$$

73. Resolva as equações

a) $\log_2^2 x - \log_2 x^2 - 3 = 0$

b) $\log_2^2 x - 15\log_8 x^2 + 16 = 0$

c) $2\log^2(x+1) - \log(x+1)^2 - 4 = 0$

d) $\log_3^3 x - \log_3 x^2 = 0$

74. Resolva o sistema

$$\begin{cases} 2\log x + 3\log y = 7 \\ 4\log x - \log y = 0 \end{cases}$$

Solução

Multiplicando a 2ª equação por 3 e somando na 1ª, temos:

$$\begin{cases} 2\log x + 3\log y = 7 \\ 12\log x - 3\log y = 0 \end{cases}$$

$$14\log x = 7 \quad \Rightarrow \quad \log x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 10^{\frac{1}{2}} \Rightarrow x = \sqrt{10}$$

Substituindo x na 2ª equação vem:

$$4\log\sqrt{10} - \log y = 0$$

$$\log(\sqrt{10})^4 = \log y \Rightarrow y = (\sqrt{10})^4 \Rightarrow y = 100$$

Portanto: $S = \{(\sqrt{10}, 100)\}$

75. Resolva os seguintes sistemas:

a) $\begin{cases} 2\log x - 3\log y = -8 \\ 5\log x - 2\log y = -9 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \log_2 x + \log_2 y = 1 \\ 4x - 3y = 5 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \log x + \log y = 1 \\ x^2 - 5y^2 = 5 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2^x = \dfrac{1}{2^{4+y}} \\ \log_2(2x + y) = 1 \end{cases}$

3.4 Mudança de Base

Como você encontraria $\log_2 3$ usando uma calculadora onde só existem as teclas **logx** e **lnx** ?

A princípio torna-se impossível efetuarmos esta operação sem mudarmos este logaritmo para a base 10 ou para a base e.

Vamos mudá-lo, por exemplo, para a base 10, da seguinte maneira:

$\log_2 3 = x \Rightarrow 2^x = 3$, então:

$$\log 2^x = \log 3 \Rightarrow x.\log 2 = \log 3 \Rightarrow x = \frac{\log 3}{\log 2}$$

Ficou fácil encontrar agora esta valor.

Propriedade

Sendo a, b e c números reais positivos, com a e c diferentes de 1, tem-se:

$$\boxed{\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}}$$

Fazendo $\log_a b = x$, devemos provar que $x = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$

Temos:

$$\log_a b = x \Rightarrow a^x = b \Rightarrow \log_c a^x = \log_c b \Rightarrow x.\log_c a = \log_c b$$

$$\Rightarrow x = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

Exemplos

1º Escrevendo $\log_2 7$ na base 3 fica:

$$\log_2 7 = \frac{\log_3 7}{\log_3 2}$$

2º Escrevendo $\log_4 5$ na base 10 fica:

$$\log_4 5 = \frac{\log 5}{\log 4}$$

3º Escrevendo $\log_{\frac{1}{2}} 9$ na base **e** fica:

$$\log_{\frac{1}{2}} 9 = \frac{\log_e 9}{\log_e \frac{1}{2}} = \frac{\ln 9}{\ln \frac{1}{2}} = \frac{\ln 9}{\ln 1 - \ln 2} = -\frac{\ln 9}{\ln 2}$$

Observações

1ª) Podemos apresentar a mudança de base da seguinte forma:

$$\boxed{\log_a b \,.\, \log_c a = \log_c b}$$

2ª) Como conseqüência da mudança de base, temos:

$$\boxed{\log_a b = \frac{1}{\log_b a}}$$

De fato: $\log_a b = \dfrac{\log_b b}{\log_b a} = \dfrac{1}{\log_b a}$

Exemplo: $\log_5 2 = \dfrac{1}{\log_2 5}$

Exercícios

76. Escreva os seguintes logaritmos na base c.

a) $\log_7 5, \quad c = 8$

b) $\log_{\sqrt{2}} 10, \quad c = 3$

c) $\log_{\frac{1}{2}} 5, \; c = 2$

d) $\log_6 4, \quad c = e$

e) $\log_8 \sqrt[3]{5}, \quad c = 7$

f) $\log \dfrac{2}{3}, \quad c = 5$

77. Transforme num só logaritmo:

a) $\dfrac{\log_5 3}{\log_5 6}$

b) $\dfrac{\log_2 5 + \log_2 6}{\log_2 10}$

c) $\dfrac{1 - \log_3 2}{2 + \log_3 4}$

d) $\dfrac{\log \frac{1}{2}}{3 \log 2 + \log 4}$

e) $\log_3 2 \,.\, \log_5 3$

f) $\log_5 4 \,.\, \log_3 5 \,.\, \log_4 6$

78. Sendo x um número real positivo e diferente de um, mostre que:

$$\frac{1}{\log_8 x} + \frac{1}{\log_3 x} - \frac{1}{\log_4 x} = \log_x 6$$

Solução

Aplicando-se a conseqüência de mudança de base, temos:

$$\log_x 8 + \log_x 3 - \log_x 4 = \log_x \frac{8.3}{4} = \log_x 6$$

79. Satisfeitas as condições de existência, prove que:

$$\frac{1}{\log_a b} + \frac{1}{\log_c b} = \frac{1}{\log_{ac} b}$$

80. Sendo $\log_a b = 1 + 2x$ e $\log_a b = \dfrac{1}{x^2 - x + 1}$, calcule x.

81. Dado $\log_2 5 = a$, calcule em função de a $\log \sqrt[3]{40}$.

Solução

$$\log \sqrt[3]{40} = \frac{\log_2 \sqrt[3]{40}}{\log_2 10} = \frac{\frac{1}{3}\log_2 40}{\log_2 2 . 5} = \frac{\frac{1}{3}\log_2 (2^3.5)}{\log_2 2 + \log_2 5} =$$

$$= \frac{\frac{1}{3}\left(\log_2 2^3 + \log_2 5\right)}{1 + \log_2 5} = \frac{\frac{1}{3}(3 + a)}{1 + a} = \frac{a + 3}{3(a + 1)}$$

82. São dados: $\log_{15} 3 = a$ e $\log_{15} 2 = b$ obtenha $\log_2 3$ em função de a e b.

83. Sendo log2 = a e log3 = b, determine:

a) $\log_9 20$

b) $\log_{64} 27$

c) $\log_6 144$

d) $\log_{24} 360$

84. Mostre que $\dfrac{\log_a k}{\log_{ma} k} = 1 + \log_a m$

85. Mostre que $\ln \sqrt[x]{x^x} = e^x$

86. Resolva as equações:

a) $\log_2 x + \log_8 x = 8$

b) $\log_4 (x + 2) . \log_x 2 = 1$

c) $\log_2 x = \log_{\sqrt{x}} x^2 + \log_x 2$

87. Resolva o sistema

a) $\begin{cases} \log_2 x + \dfrac{1}{\log_y 2} = 3 \\ x + y = 6 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \log_4 x + \log_8 y = 3 \\ 16x - y = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2\log_2 x + \log_{\frac{1}{2}} y = 4 \\ x\sqrt{y} = 2^6 \end{cases}$

3.5 Função Logarítmica

Introdução

Vamos determinar a inversa da função $y = 2^x$. Para isso, troca-se x e y entre si e isola-se y.

Então:

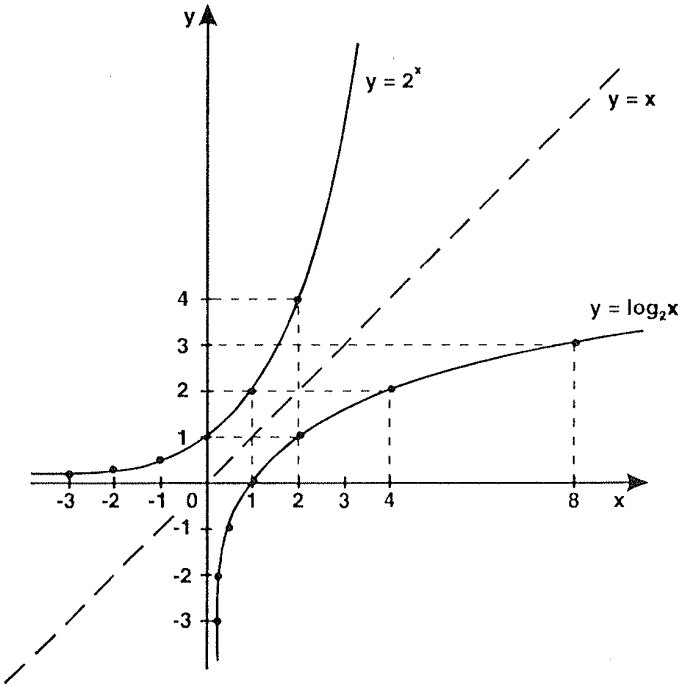
$y = 2^x \Rightarrow x = 2^y \Rightarrow y = \log_2 x$.

Assim, observamos que a inversa da função exponencial $y = 2^x$ é a função $y = \log_2 x$ chamada **função logarítmica de base 2**.

Atribuindo alguns valores para x, encontramos os pontos da função exponencial $y = 2^x$ e trocando as coordenadas desses pontos, obtemos os pontos da função logarítmica $y = \log_2 x$ que é a sua inversa, como mostra a tabela a seguir.

x	$y = 2^x$	Ponto	Ponto da Inversa
-3	$\frac{1}{8}$	$\left(-3, \frac{1}{8}\right)$	$\left(\frac{1}{8}, -3\right)$
-2	$\frac{1}{4}$	$\left(-2, \frac{1}{4}\right)$	$\left(\frac{1}{4}, -2\right)$
-1	$\frac{1}{2}$	$\left(-1, \frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{1}{2}, -1\right)$
0	1	(0, 1)	(1, 0)
1	2	(1, 2)	(2, 1)
2	4	(2, 4)	(4, 2)
3	8	(3, 8)	(8, 3)

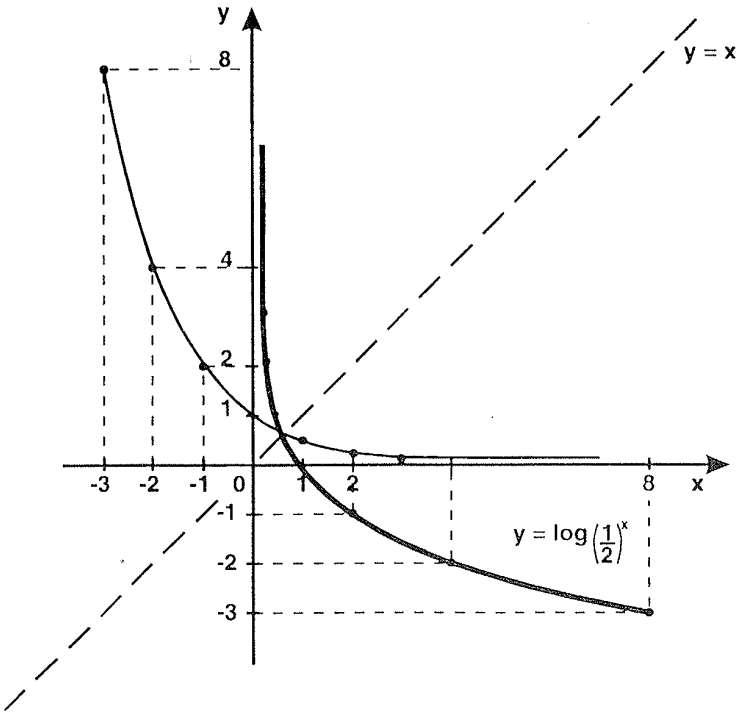
Graficamente, temos:



Da mesma forma, a função $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ é inversa da função $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

A seguir, temos a tabela para alguns valores atribuídos a x e os respectivos gráficos.

x	$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$	Ponto	Ponto de Inversa
−3	8	(−3, 8)	(8, −3)
−2	4	(−2, 4)	(4, −2)
−1	2	(−1, 2)	(2, −1)
0	1	(0,1)	(1, 0)
1	$\frac{1}{2}$	$\left(1, \frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{1}{2}, 1\right)$
2	$\frac{1}{4}$	$\left(2, \frac{1}{4}\right)$	$\left(\frac{1}{4}, 2\right)$
3	$\frac{1}{8}$	$\left(3, \frac{1}{8}\right)$	$\left(\frac{1}{8}, 3\right)$



Definição

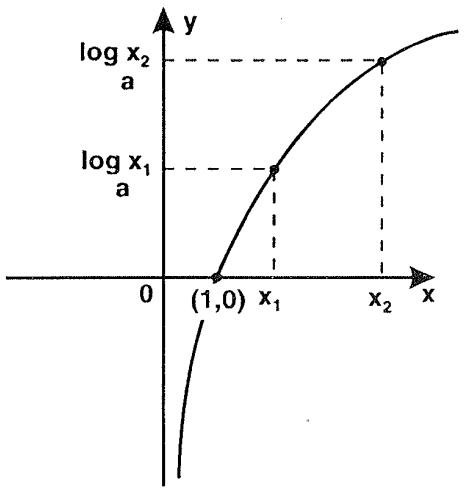
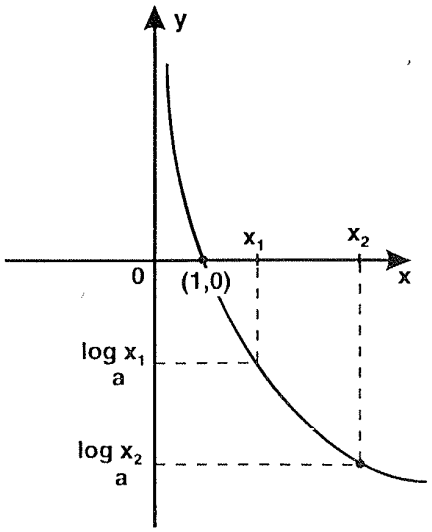
Chama-se função logarítmica de base a, a função $\mathbf{f(x) = \log_a x}$, onde **a** é um número real positivo e diferente de **1** $\mathbf{(1 \neq a > 0)}$ definida para todo x real positivo.

São exemplos de funções logarítmicas:

- $y = \log_2 x$ → função logarítmica de base 2.
- $y = \log_{\frac{1}{3}} x$ → função logarítmica de base $\frac{1}{3}$.
- $y = \log x$ → função logarítmica de base 10.
- $y = \ln x$ → função logarítmica de base e.

Considerações

O gráfico da função logarítmica $y = \log_a x$ tem os seguintes aspectos:

a > 1: função crescente	**0 < a < 1: função decrescente**
	

Note que:

- O domínio é IR_+^* e o conjunto imagem é IR.
- Em ambos os casos, a curva intercepta o eixo x no ponto (1, 0).
- Para a > 1, a função é **crescente** em IR, pois para

$$\boxed{x_1 < x_2 \Leftrightarrow \log_a x_1 < \log_a x_2, \quad \forall x_1, x_2 \in IR_+^*.}$$

- Para 0 < a < 1, a função é **decrescente** em R+*, pois para

$$\boxed{x_1 < x_2 \Leftrightarrow \log_a x_1 > \log_a x_2, \ \forall x_1, x_2 \in IR_+^*.}$$

Exercícios

88. Faça o gráfico e verifique se a função é crescente ou decrescente nos seguintes casos:

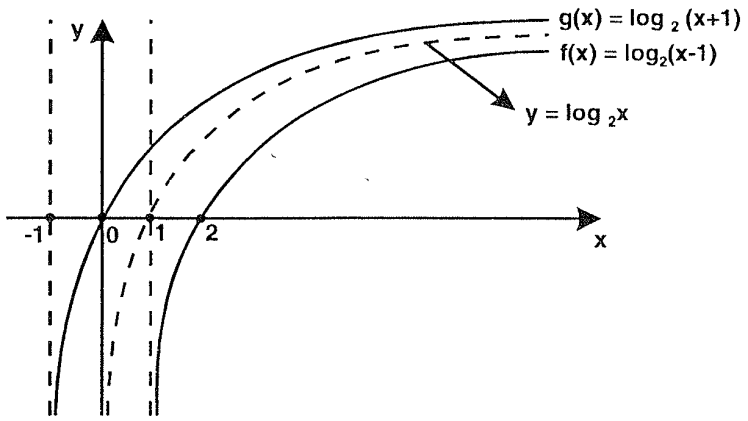
a) $f(x) = \log_3 x$

b) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$

89. Faça no mesmo sistema cartesiano, os gráficos das funções $f(x) = \log_2(x-1)$ e $g(x) = \log_2(x+1)$.

Solução

Deslocando o gráfico da função $y = \log_2 x$, temos os gráficos das funções f e g, como mostra a representação a seguir:



90. Faça num mesmo sistema cartesiano, os gráficos das funções $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} (x - 2)$ e $g(x) = \log_{\frac{1}{2}} (x + 2)$, dando o domínio e o conjunto-imagem.

91. Classifique em Verdadeiro (V) ou Falso (F)

a) $\log_2 7 > \log_2 5$

b) $\log_5 \frac{1}{3} > \log_5 \frac{2}{5}$

c) $\log_{\frac{1}{2}} 7 \geq \log_{\frac{1}{2}} 9$

d) $\log_{\frac{7}{2}} 0{,}2 > \log_{\frac{7}{2}} 0{,}01$

e) $\log_{0,1} 5 \leq \log_{0,1} 2$

f) $\log_{\sqrt{2}} 5 < 0$

92. Determine o domínio das funções:

a) $y = \log_3 (4x + 8)$

b) $y = \log (x^2 - 2x - 15)$

c) $y = \log_{x-1} (3x - 5)$

d) $y = \log_{\frac{1}{2}} (3x + 1) + \log_{\frac{1}{2}} (2x - 4)$

e) $y = |\log (x - 3)|$

3.6 Inequações Logarítmicas

Inequações onde a incógnita aparece no logaritmando ou na base chamam-se inequações logarítmicas.

São exemplos de inequações logarítmicas

- $\log_5 (3x + 5) > \log_5 (2x - 1)$
- $\log_x 2 \geq 1$
- $\log_{\frac{1}{2}} (2x - 3) \leq -1$

Para resolvermos uma inequação logarítmica, convém lembrarmos que:

1º Se a função $y = \log_a x$ é crescente, então:

$a > 1$	$\log_a x_1 < \log_a x_2 \Leftrightarrow x_1 > x_2$

2º Se a função $y = \log_a x$ é decrescente, então:

$0 < a < 1$	$\log_a x_1 > \log_a x_2 \Leftrightarrow x_1 < x_2$

Exercícios

93. Resolver as inequações:

a) $\log_5 (3x+5) > \log_5 (2x+1)$

b) $\log_{\frac{1}{2}} (2x-3) \leq -1$

Solução

a) $\log_5 (3x+5) > \log_5 (2x-1)$

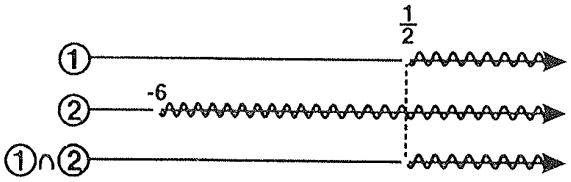
Condição de existência:

$$\begin{cases} 3x + 5 > 0 \Rightarrow x > -\dfrac{5}{3} \\ 2x - 1 > 0 \Rightarrow x > \dfrac{1}{2} \end{cases} \quad \text{então } x > \frac{1}{2} \ (1)$$

Como a base é maior que 1, temos

$3x + 5 > 2x - 1 \Rightarrow x > -6$ (2)

Fazendo (1) $\cap$ (2), vem:



$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > \frac{1}{2}\right\}$$

b) $\log_{\frac{1}{2}} (2x - 3) \leq -1$

Condição de existência:

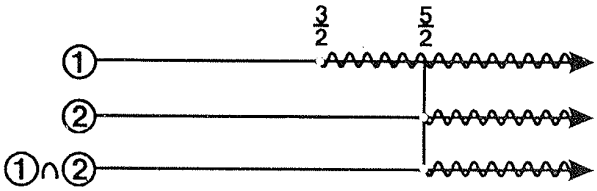
$$2x - 3 > 0 \quad \Rightarrow \quad x > \frac{3}{2} \quad ①$$

$$\log_{\frac{1}{2}} (2x - 3) \leq \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} \quad \Rightarrow \quad \log_{\frac{1}{2}} (2x - 3) \leq \log_{\frac{1}{2}} 2$$

Como a base está entre 0 e 1, então:

$$2x - 3 \geq 2 \Rightarrow x \geq \frac{5}{2} \quad ②$$

Fazendo ① ∩ ②, vem:



$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq \frac{5}{2}\right\}$$

94. Determine os valores de x que verificam as desigualdades

a) $\log_7 (2x + 3) < \log_7 (5x - 2)$

b) $\log_{\frac{1}{3}} (x - 2) \geq \log_{\frac{1}{3}} (3x - 4)$

c) $\log_2 (3x+1) \leq 0$

d) $\log_{\frac{3}{4}} (5x - 10) \geq -1$

e) $\log_{\sqrt{2}} (x+1) \geq \log_{\sqrt{2}} (x^2 - 1)$

95. Resolva as inequações

a) $\log (x^2 - 2x + 1) < 2$

b) $\log (x^2 + x - 2) \geq -2^{\log_{\frac{1}{2}}}$

c) $\log_2 (x-3) + \log_2 (x-2) < 1$

d) $\log_3 (x+4) - \log_9 (x+4) \leq 1$

96. Resolva as inequações

a) $\log_{(2-3x)} \frac{3}{7} > \log_{(2-3x)} \frac{4}{5}$

b) $\log_{\frac{1}{3}} \left(\log_{\frac{1}{3}} x \right) \geq 0$

Solução

a) $\log_{(2-3x)} \frac{3}{7} > \log_{(2-3x)} \frac{4}{5}$

$\frac{3}{7} < \frac{4}{5}$ e $\log_{(2-3x)} \frac{4}{5} > \log_{(2-3x)} \frac{4}{5}$

então verificamos que a base está entre 0 e 1, logo:

$0 < 2 - 3x < 1 \rightarrow -2 < -3x < -1 \Rightarrow \frac{1}{3} < x < \frac{2}{3}.$

Assim: $S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{3} < x \ \frac{2}{3} \right\}$

Lembrete

$x_1 < x_2 \Rightarrow \log_a x_1 > \log_a x_2,$

para $0 < a < 1$

b) $\log_{\frac{1}{3}}\left(\log_{\frac{1}{3}} x\right) \geq 0$

Condição de existência:

$$\begin{cases} x > 0 \\ \log_{\frac{1}{3}} x > 0 \Rightarrow \log_{\frac{1}{3}} x > \log_{\frac{1}{3}} 1 \Rightarrow x < 1 \quad (1) \end{cases}$$

então devemos ter $0 < x < 1$

Assim:

$$\log_{\frac{1}{3}}\left(\log_{\frac{1}{3}} x\right) \geq \log_{\frac{1}{3}} 1 \Rightarrow \log_{\frac{1}{3}} x \leq 1 \Rightarrow \log_{\frac{1}{3}} x \leq \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \geq \frac{1}{3} \quad (2)$$

Fazendo $(1) \cap (2)$, vem:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{3} \leq x < 1\right\}$$

97. Resolva as seguintes inequações:

a) $\log_{(3x+5)} 7 \geq \log_{(3x+5)} 6$

b) $\log_{(4-2x)} \frac{7}{3} < \log_{(4-2x)} \frac{2}{5}$

c) $\log_{\frac{1}{3}}(\log_4(x^2 - 5)) > 0$

98. Determine x que satisfaz as desigualdades:

a) $3 \log x + \log (2x + 3)^3 \leq 3 \log 2$

b) $\dfrac{1}{\ln x} + \dfrac{1}{\log_x e - 1} > 1$

99. Resolva as inequações

a) $\log^2_2 x - \log_2 x \geq 0$

b) $\log^2_3 x - 4 \log_3 x + 3 < 0$

c) $\log_{\frac{1}{2}} (x - 1) + 3 \log_{\frac{1}{2}} (x - 1) > 0$

d) $\log^2_{\frac{1}{5}} (x - 1) \leq 0$

100. Determine m para que a equação $x^2 - 2\sqrt{2}\,x + \log_2(m - 1) = 0$ admita raízes reais.

3.7 Logaritmos Decimais

Como encontrar log40?

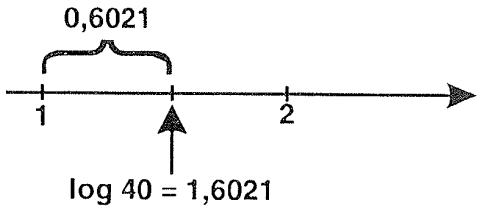
Partindo do princípio de que todo número real e positivo está compreendido entre duas potências consecutivas de base 10, temos:

$$10^1 < 40 < 10^2 \Rightarrow \log 10^1 < \log 40 < \log 10^2 \Rightarrow 1 < \log 40 < 2$$

Se o log40 está compreendido entre 1 e 2, ele é da forma:

$\log 40 = 1,...$

Numa calculadora (com aproximação de quatro casas decimais), encontramos $\log 40 = 1,6021$.



Este número é formado de uma parte inteira chamada característica e uma parte decimal chamada mantissa.

$$\log 40 = 1{,}6021 = 1 + 0{,}6021 \begin{cases} \text{característica: } 1 \\ \text{mantissa: } 0{,}6021 \end{cases}$$

Generalizando, para $x \in \mathbb{R}_+^*$ e c inteiro, temos:

$10^c \leq x < 10^{c+1} \Rightarrow \log 10^c \leq \log x \quad \log 10^{c+1} \Rightarrow c \leq \log x < x+1$, ou seja:

$\log x = c + m$, onde $c \in \mathbb{Z}$ e $0 \leq m < 1$, com $m \in I$

c é a característica do logx, e **m** a mantissa que pode ser obtida numa tabela ou numa calculadora.

Logaritmo de um número entre 0 e 1

Na calculadora encontramos log 0,0258 = −1,5884 (com aproximação de quatro casas decimais), isto é:

$\log 0{,}0258 = -1{,}5884 = -1 + (-0{,}5884)$

Somando −1 na parte inteira e 1 na parte decimal, para escrever este logaritmo de uma forma que mostre a mantissa, temos:

$\log 0{,}0258 = -1 + (-1) + (1 - 0{,}5884) = -2 + 0{,}4116.$

Então escrevemos: $\log 0{,}0258 = \overline{2},\ 4116$

onde a barra sobre o número 2 indica que apenas a parte inteira é negativa.

Esta forma de representar o logaritmo de um número é chamada forma mista ou forma preparada, em que aparecem claramente a característica (onde indica-se −2 por $\overline{2}$) e a mantissa (0,4116).

Exercícios

101. Dê a característica dos seguintes logaritmos:

a) log732 b) log65,4 c) log0,0021

Solução

a) log732

Como $10^2 < 732 < 10^3$, temos:

$2 < \log 732 < 3$, então $\log 732 = 2,...$ e portanto a sua característica é $c = 2$.

b) log65,4

Como $10^1 < 65,4 < 10^2$, temos:

$1 < \log 65,4 < 2$, então $\log 65,4 = 1,...$ e portanto a sua característica é $c = 1$.

c) log0,0021

Como $10^{-3} < 0,0021 < 10^{-4}$, temos:

$-3 < \log 0,0021 < -4$, então $\log 0,0021 = -3 + m$ e portanto a sua característica é $c = -3$

102. Obtenha a característica dos logaritmos:

a) log12

b) log537,1

c) log6891,36

d) log0,254

e) log0,017

f) log0,002346

103. Dê a característica e a mantissa dos logaritmos:

a) $\log x = 3,2012$

b) $\log x = 1,2796$

c) $\log x = -1,3020$

d) $\log x = 0,0032$

e) $\log x = \overline{5},2361$

f) $\log x = \overline{2},6198$

104. Sendo $\log 12 = 1,08$, determine:

a) log120

b) log0,0012

c) $\log \sqrt[3]{12}$

d) $\log_{\sqrt{12}} 100$

105. Resolva a equação $2^x = 5$, com aproximação até milésimos. Dados $\log 2 = 0,301$.

Solução

$2^x = 5 \Rightarrow \log 2^x = \log 5 \Rightarrow x\log 2 = \log 5$

$$x = \frac{\log 5}{\log 2} \Rightarrow x = \frac{\log \frac{10}{2}}{\log 2} \Rightarrow x = \frac{\log 10 - \log 2}{\log 2} \Rightarrow$$

$$x = \frac{1 - 0{,}301}{0{,}301} = \frac{0{,}699}{0{,}301} = 2{,}322$$

$$S = \{2{,}322\}$$

106. Resolva as equações a seguir, com aproximação até décimos.

a) $3^x = 7$ c) $e^x = 2$ e) $2^{2x} - 9 \cdot 2^x + 20 = 0$

b) $5^x = 12$ d) $2^{3x} - 7 = 0$ f) $3^{x+1} - 3^x = 40$

Dados log2 = 0,301, loge = 0,434, log3 = 0,477 e log7 = 0,845

107. Digitando o número 7 numa calculadora, quantas vezes devemos pressionar a tecla "log" para que acuse erro no visor?

Solução

Como $10^0 < 7 < 10^1$, então $0 < \log 7 < 1 \Rightarrow \log 7 = 0,m$ (1ª vez)

Sendo $10^{-2} < 0,m < 10^{-1}$, então $-2 < \log 0,m < -1$ (2ª vez)

Como o log0,m é um número negativo, ao pressionarmos a tecla log pela 3ª vez, aparecerá a mensagem "Erro" no visor, pois não existe logaritmo de número negativo, logo devemos pressionar a tecla "log" três vezes.

108. Digitando o número 88888888 (oito oitos) numa calculadora, quantas vezes a tecla "log" precisa ser pressionada para que apareça a mensagem de erro no visor?

109. Sendo log2 = 0,301, quantos algarismos possui o número 2^{1000}?

110. Daqui a t anos o valor de um automóvel será $V = 2.000 \cdot (0{,}75)^t$ dólares. A partir de hoje, daqui a quantos anos ele valerá a metade do que vale hoje?

Adote log2 = 0,30 e log3 = 0,48.

111. Dizemos que um capital está colocado a juros compostos se no final de cada período financeiro o juro adquirido é incorporado ao capital, rendendo juros novamente.

Determine a expressão que indica o montante (M) produzido num capital inicial C num período financeiro (n) com uma taxa (i).

Solução

Temos: Capital inicial: C

Montante: M

Taxa: i

Período: n

Então:

1º período: capital C e juro: C . i

Fim do período: $C + C \cdot i = C(1+i)$

2º período: capital $C(1+i)$ e Juro: $C(1+i) \cdot i$

Fim do período

$C(1+i) + C(1+i).i = C(1+i) \cdot (1+i) = C(1+i)^2$

3º período: Capital $C(1+i)^2$ e Juro $C(1+i)^2.i$

Fim do período

$C(1+i)^2 + C(1+i)^2.i = C(1+i)^2 \cdot (1+i) = C(1+i)^3$

Para o período n, vem:

$$\boxed{M = C(1+i)^n}$$

112. Um capital inicial de R$ 1 000,00 é colocado a juros compostos à taxa de 3% ao mês. Pergunta-se:

a) Qual o montante daqui a 10 meses?

b) Em quanto tempo dobrará o montante?

Use: $\log 1{,}03 = 0{,}0128$

$\log 1343 = 3{,}128$

$\log 2 = 0{,}3010$

Respostas dos Exercícios

1.

a)	16	e)	81	i)	0
b)	16	f)	−81	j)	1
c)	1	g)	−32	k)	−1
d)	3	h)	−32	l)	1

2.

a)	$\frac{8}{27}$	d)	1	g)	0,0625
b)	$\frac{1}{16}$	e)	2,89	h)	0,216
c)	$-\frac{243}{32}$	f)	$\frac{25}{16}$	i)	$-\frac{1}{81}$

3.

a)	$\frac{1}{8}$	d)	$-\frac{1}{3}$	g)	$-\frac{4}{9}$
b)	$\frac{1}{5}$	e)	9	h)	$\frac{2}{9}$
c)	$\frac{1}{4}$	f)	$\frac{27}{64}$	i)	$-\frac{16}{9}$

4.

a)	$\frac{7}{16}$	d)	$\frac{225}{8}$	g)	1
b)	$\frac{233}{36}$	e)	5		
c)	44	f)	10^{-3}		

5. 3

7. Não, pois $(2^3)^2 = 2^6$ e $2^{3^2} = 2^9$

8.

a)	9	d)	$\frac{1}{4}$	g)	3
b)	12	e)	2		
c)	$\frac{27}{2}$	f)	1		

9.

a)	9	c)	5	e)	7
b)	2	d)	2		

10. 2^{23}

11. $\frac{a^2}{b}$

12. m^2-2

14.

a)	V	c)	F	e)	V
b)	V	d)	F		

15.

a)	6	d)	-4	g)	$\frac{1}{3}$
b)	3	e)	$2\sqrt[7]{2}$	h)	$-\frac{4}{5}$
c)	-2	f)	$\frac{4}{5}$	i)	0,1

16.

a) $2\sqrt{2}$ f) 2 k) 6

b) $5\sqrt[3]{5}$ g) $12\sqrt{5}$ l) $-2\sqrt{2}$

c) 2 h) 180 m) 4

d) 9 i) $\sqrt[15]{16}$ n) 4

e) $\sqrt[4]{8}$ j) $\sqrt[8]{3^7}$

17.

a) $\sqrt[6]{540}$

b) $\sqrt[12]{2^4 \cdot 3^7 \cdot 5^3}$

18.

a) $V = \{\pm 16\sqrt{2}\}$ c) $V = \{0, \sqrt{2}\}$

b) $V = \{-3\sqrt[3]{3}\}$ d) $V = \{2, \sqrt[6]{2}\}$

19.

a) $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ c) $\dfrac{5 \cdot \sqrt[5]{4^4}}{4}$ e) $\dfrac{7(\sqrt{5} - \sqrt{2})}{3}$

b) $-\dfrac{\sqrt[3]{4}}{2}$ d) $3(\sqrt{2} + 1)$ f) $-\dfrac{(\sqrt{6} + 1)}{5}$

20.

a) $\dfrac{1}{3}$ c) $\dfrac{1}{9}$ e) $2^{\frac{51}{10}}$ g) $2^{\frac{19}{20}}$

b) 4 d) $\dfrac{3}{2}$ f) $3^{-\frac{4}{3}} = \dfrac{1}{81}$ h) 27

21.

a) $x = 4$

b) $x = 0$

c) $x = \frac{7}{2}$

d) $x = 2$

e) $x = 12$

f) $x = \frac{3}{4}$

g) $x = \frac{1}{6}$

h) $x = -2$

i) $x = 4$

j) $x = \frac{1}{2}$

k) $x = -\frac{1}{3}$

l) $x = \frac{4}{5}$

22.

a) $\{1, 2\}$

b) $\{0, 1\}$

c) $\{2, 8\}$

d) $\{0\}$

e) $\left\{\frac{34}{9}\right\}$

f) $\{2\}$

g) $\left\{\frac{11}{4}\right\}$

h) $\{4\}$

i) $\{3\}$

23.

a) $\{-3\}$

b) $\left\{2, \frac{11}{3}\right\}$

c) $\{1\}$

d) $\left\{\frac{3}{2}\right\}$

e) $\{-1\}$

f) $\{0, 3\}$

24.

a) $\{1\}$

b) $\{4\}$

c) $\{3\}$

d) $\{0\}$

e) $\{3\}$

f) $\{-1\}$

26.

a) $\{2\}$

b) $\{3\}$

c) $\{4\}$

27.

a) $\{2, 3\}$

b) $\{1, 2\}$

c) $\{0\}$

d) $\{2\}$

e) $\left\{0, \frac{1}{4}\right\}$

f) $\left\{\frac{3}{2}\right\}$

g) $\{\pm\sqrt{2}\}$

28.

a) $\{0, 1\}$

b) $\left\{\frac{3}{2}\right\}$

c) $\{2\}$

d) $\{0\}$

30.

a) $\{(0, 1)\}$

b) $\{(-1, 4)\}$

c) $\left\{\left(-\frac{11}{4}, \frac{9}{4}\right)\right\}$

d) $\left\{\left(-\frac{5}{4}, \frac{3}{4}\right)\right\}$

e) $\{(2, 3)\}$

31.

a) crescente

b) crescente

c) crescente

d) decrescente

e) decrescente

f) decrescente

g) crescente

h) crescente

i) decrescente

32.

a) f(x) é crescente $\Leftrightarrow k > \frac{1}{2}$, $k \in \mathbb{R}$

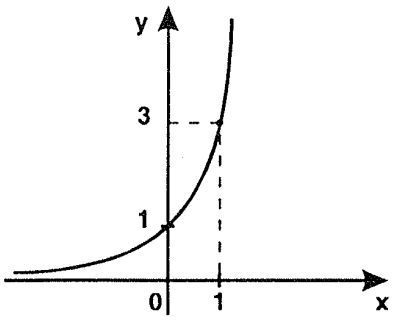
b) f(x) é decrescente $\Leftrightarrow 3 < k < \frac{7}{2}$, $k \in \mathbb{R}$

33.

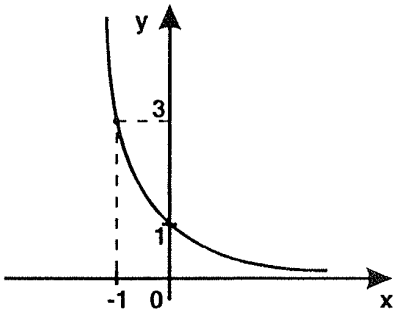
a)	F	e)	F
b)	V	f)	F
c)	V	g)	V
d)	V	h)	V

34.

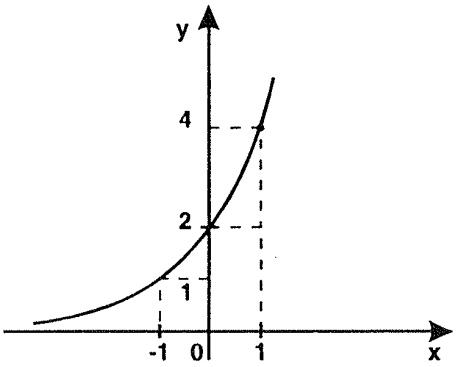
a)



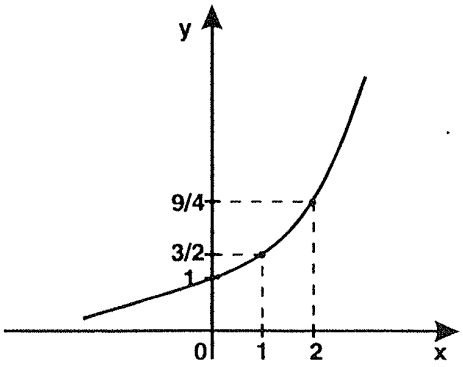
b)



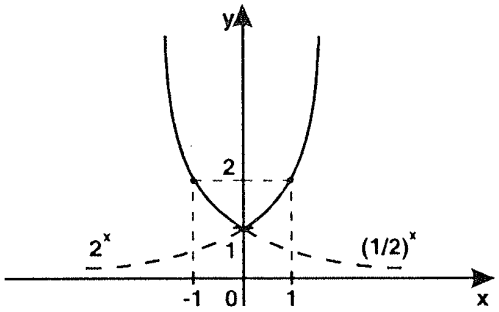
c)



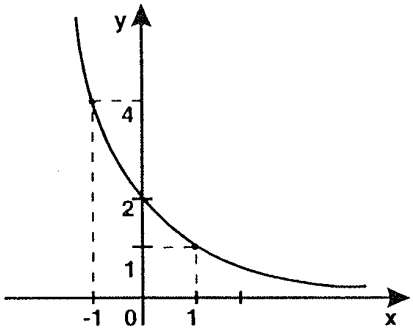
d)



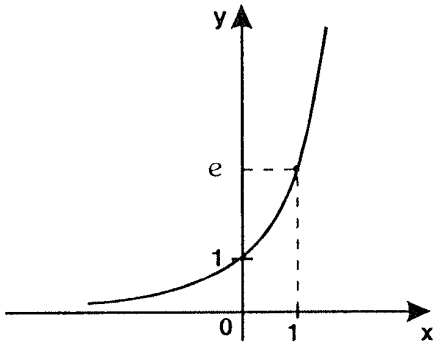
e)



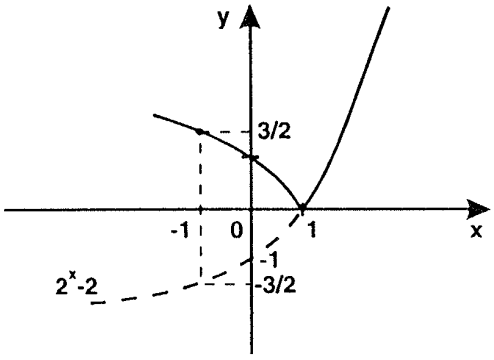
f)



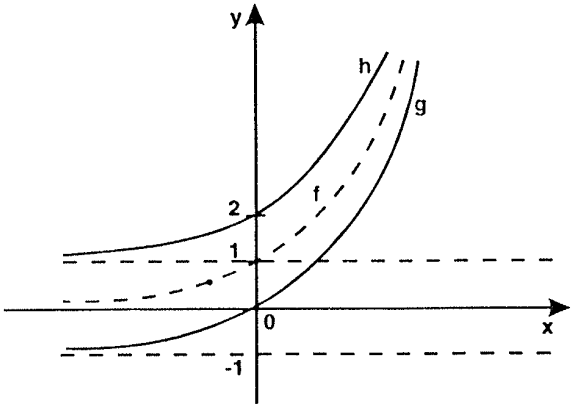
g)



h)



35.



37.

a) R$ 6 561,00

b) 2 anos

c) R$ 2 710,00

38. 14

39. $\left(1 - 2^{-\frac{1}{16}}\right)$ da quantidade inicial

41. 6,2 bilhões aproximadamente

43.

a) $\{x \in IR \mid x > 5\}$

b) $\{x \in IR \mid x \leq -4 \text{ ou } x \geq 4\}$

c) $\left\{x \in IR \mid x < \frac{3}{4}\right\}$

d) $\left\{x \in IR \mid -\frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}\right\}$

e) $\{x \in IR \mid -2 \leq x \leq -1\}$

f) IR

g) $\left\{x \in IR \mid x < \frac{7}{5}\right\}$

h) $\{x \in IR \mid x \geq 0\}$

i) $\{x \in IR \mid 3 \leq x < 4\}$

45.

a) $\{x \in IR \mid -1 \leq x \leq 1\}$

b) $\{x \in IR \mid x < 0 \text{ ou } x > 2\}$

c) IR^*

d) $\{x \in IR \mid x \leq 2\}$

e) $\{x \in IR \mid x < 0\}$

46.

a) $\{x \in IR \mid x \geq 3\}$

b) $IR - \{2\}$

c) $\{x \in IR \mid x > -1\}$

d) $\{x \in IR \mid x > 4\}$

e) IR

f) $\{x \in IR \mid x \geq 0\}$

47.

a) $\log_2 16 = 4$

b) $\log_3 9 = 2$

c) $\log_7 \frac{1}{49} = -2$

d) $\log_{\frac{1}{3}} 9 = -3$

e) $\log_{\frac{3}{4}} \frac{9}{16} = 2$

f) $\log_{0,1} 0,001 = 3$

g) $\log_{\sqrt{2}} 2\sqrt{2} = 3$

h) $\log_{0,33} 1 = 0$

49.

a) $-\frac{1}{3}$

b) $\frac{1}{4}$

c) 4

d) $\frac{21}{2}$

e) -1 e 4

f) 16

50. $M_1 = 100M_2$

52.

a) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > -2\}$

b) $\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{7}{2} \neq x > 3\}$

c) $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 2 \text{ e } x \neq 1\}$

d) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \text{ ou } x > 2\}$

e) $\{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < -2 \text{ ou } x > 1\}$

f) $\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{10}{3} \neq x > 3\}$

53. $x < -1$ ou $x > 1$, $x \in \mathbb{R}$ e $1 \neq a > 0$, $a \in \mathbb{R}$

55.

a) $\{2\}$ b) $\left\{-\frac{1}{2}\right\}$ c) $\{2\}$

56. 0,0231

57.

a) $\log_5 8 + \log_5 3$

b) $\log_2 5 + \log_2 7 + \log_2 9$

c) $\log 2 - \log 3$

d) $-2 + \log 133$

e) $\log_3 4 + \log_3 \pi + \log_3 9$

f) $2 \log_7 5$

g) $\frac{1}{8} \log_3 2$

h) $\frac{5}{2}$

i) $\frac{3}{2} + \log_2 3$

58.

a) 0,77

b) 0,70

c) 1,17

d) 1,84

e) 1,40

f) 0,075

g) 2,14

h) −0,056

59. $5a - 4b$

61.

a) $\frac{1}{2} \log a + 2 \log b + \log c$

b) $\log a + \frac{1}{2} \log b - 3 \log c$

c) $\log a + \frac{1}{2} \log b + \frac{1}{2} \log c - \log d$

d) $3\log a + \frac{1}{2}\log b - \frac{1}{3}\log c - \log d$

e) $\frac{1}{2}\log a + \frac{1}{4}\log b - \frac{1}{2}\log c - \frac{1}{2}\log d$

f) $\frac{1}{5}\log a + \log(b + c) - 2 - \log 2 - \log d$

62.

a) $x = \sqrt[3]{\frac{10(b^2 - c^2)}{b^2}}$

c) $v = \frac{\pi r^2 h}{3}$

b) $A = \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}$

64. 2 e 3

65. $a = 4$ e $b = 2$

66. 8

69.

a) $\{30\}$

d) $\{2\sqrt{3}\}$

b) $\{-3, +3\}$

e) $\{3\}$

c) $\left\{\frac{1}{3}\right\}$

71.

a) $\left\{\frac{11}{6}\right\}$

b) $\{3\}$

c) $\{2\}$

73.

a) $\left\{\frac{1}{2}, 8\right\}$

c) $\left\{-\frac{9}{10}, 99\right\}$

b) $\{4, 256\}$

d) $\left\{1, 3^{\sqrt{2}}, \frac{1}{3^{\sqrt{2}}}\right\}$

75.

a) $\left\{\left(\frac{1}{10}, 100\right)\right\}$

c) $\{(5, 2)\}$

b) $\{(2, 1)\}$

d) $\{(6, -10)\}$

76.

a) $\frac{\log_8 5}{\log_8 7}$

d) $\frac{\log_e 4}{\log_e 6}$

b) $\frac{\log_3 10}{\log_3 \sqrt{2}}$

e) $\frac{\log_7 5}{9 \log_7 2}$

c) $\log_2 \frac{1}{5}$

f) $\frac{\log_5 \frac{2}{3}}{\log_5 \sqrt{2}}$

77.

a) $\log_6 3$

d) $-\log_{32} 2$

b) $\log 30$

e) $\log_5 2$

c) $\log_{36} \frac{3}{2}$

f) $\log_3 6$

80. $\{0, 3\}$

82. $\frac{b}{a}$

83.

a) $\frac{a+1}{2b}$

c) $\frac{4a+2b}{a+b}$

b) $\dfrac{b}{2a}$ d) $\dfrac{2a+2b+1}{3a+b}$

86.

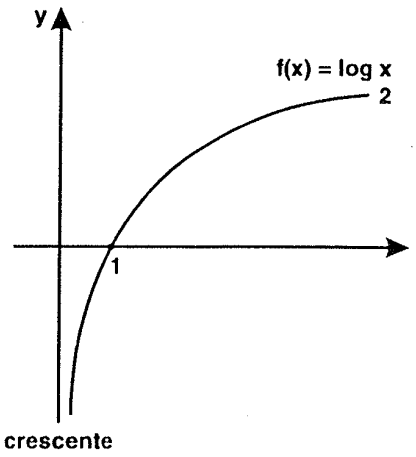
a) $\{64\}$ b) $\{2\}$ c) $\left\{2^{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}\right\}$

87.

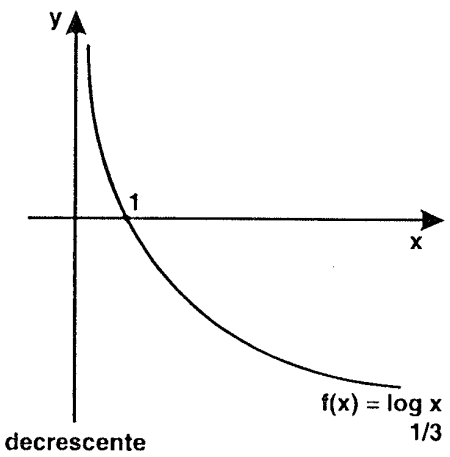
a) $\{(2, 4), (4, 2)\}$ b) $\{(4, 64)\}$ c) $\{(16, 16)\}$

88.

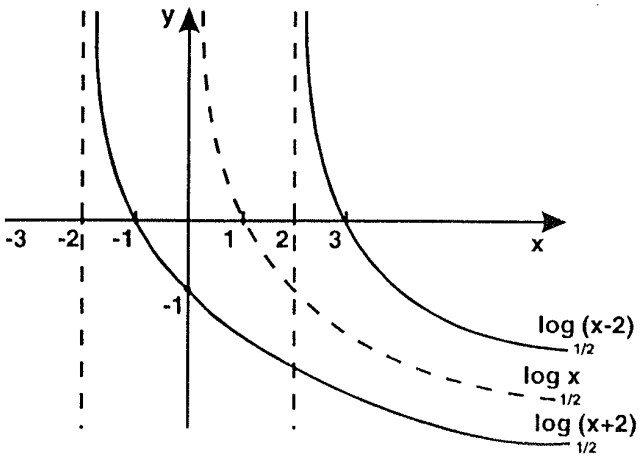
a)



b)



90.



91.

a) V

b) F

c) V

d) V

e) V

f) F

92.

a) $\{x \in IR \mid x > -2\}$

b) $\{x \in IR \mid x < -3 \text{ ou } x > 5\}$

c) $\left\{x \in IR \mid x > \frac{5}{3} \text{ e } x \neq 1\right\}$

d) $\{x \in IR \mid x > 2\}$

e) $\{x \in IR \mid x > 3\}$

94.

a) $\left\{x \in IR \mid x > \frac{5}{3}\right\}$

b) $\{x \in IR \mid x > 2\}$

c) $\left\{x \in IR \mid -\frac{1}{3} < x \leq 0\right\}$

d) $\left\{x \in IR \mid 2 < x \leq \frac{34}{15}\right\}$

e) $\{x \in IR \mid 1 < x \leq 2\}$

95.

a) $\{x \in IR \mid -9 < x < 11 \text{ ou } x \neq 1\}$

b) $\{x \in IR \mid -3 \leq x < -2 \text{ ou } 1 < x \leq 2\}$

c) $\{x \in IR \mid 3 < x < 4\}$

d) $\{x \in IR \mid -4 < x \leq 5\}$

97.

a) $\{x \in IR \mid x > -2\}$

b) $\left\{x \in IR \mid \frac{3}{2} < x < 2\right\}$

c) $\{x \in IR \mid x < -3 \text{ ou } x > 3\}$

98.

a) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < \frac{1}{2}\right\}$ b) $\{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < e\}$

99.

a) $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \leq 1 \text{ ou } x \geq 2\}$

b) $\{x \in \mathbb{R} \mid 3 < x < 27\}$

c) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 9 \text{ ou } 1 < x < 2\}$

d) $\{2\}$

100. $\{m \in \mathbb{R} \mid 1 < m \leq 5\}$

102.

a) 1 c) 3 e) −2

b) 2 d) −1 f) −3

103.

a) c = 4, m = 0,2012 d) c = 1, m = 0,0032

b) c = 2, m = 0,2796 e) c = −5, m = 0,2361

c) c = −2, m = 0,6980 f) c = −2, m = 0,6198

104.

a) 2,08 b) −2,92 c) 0,36 d) 3,7

106.

a) {1,77} c) {0,69} e) {2; 2,32}

b) {1,54} d) {0,94} f) {2,73}

108. 4 vezes

109. 302

110. 2,5 anos

111.

a) R$ 1 343,92 b) 23,5 meses

Anotações

Anotações

Anotações

Anotações

Anotações

Anotações

Bibliografia

Boyer, Carl B. - História da Matemática - São Paulo - Editora Blucher Ltda - 1974.

Caraça, Bento de Jesus - Conceitos Fundamentais da Matemática -Lisboa - Livraria Sá da Costa Editora - 1984.

Lima, Elon Lages - Logaritmos - São Paulo - Sociedade Brasileira de Matemática - 1980.

Revistas do Professor de Matemática números: 9, 15, 16, 20 e 19 - São Paulo - Sociedade Brasileira de Matemática.

School Mathematics Study Group - Matemática Curso Colegial. Vol. 1 - São Paulo - Edart - 1966.