GLACIETE JARDIM ZAGO

Matrizes, Determinantes e Sistemas Lineares

Matrizes

Definição

Chama-se matriz m por n (indica-se: m x n), com m ϵ N* e n ϵ N*, toda tabela formada por m x n números reais dispostos em m linhas e n colunas.
Indicamos uma matriz por um dos seguintes símbolos:

[ ] ou ( ) ou ‖ ‖

e a designamos por uma letra maiúscula.

Exemplos

A = $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -7 \\ 0 & 6 & -1 & 5 \\ -8 & 4 & 3 & 0 \end{bmatrix}$, matriz 3 x 4 (“três por quatro”)

$B = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 1 & -5 \\ 1/2 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$, matriz 3 x 2 (“três por dois”)

$C = \begin{bmatrix} 10 & 5 \\ 9 & -8 \end{bmatrix}$, matriz 2 x 2 (“dois por dois”)

$D = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 6 & -1 & 0 \end{bmatrix}$, matriz 1 x 5 (“um por cinco”)

Notações

a) Explicita
Cada elemento de uma matriz A qualquer é indicado por a_{ij}, onde i indica a posição da linha e j a posição da coluna ocupada por este elemento.
Então:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{mn} & a_{mn} & a_{mn} & a_{mn} \end{bmatrix}$$

b) Abreviada (devida à Kronecker)
A = (a_{11})mxn; (1 ≤ i ≤ m e 1 ≤j ≤ n)
ou simplesmente:
A = (a_{11})mxn

Principais tipos de matrizes

a) Matriz linha

É toda matriz que possui uma única linha.
Exemplo: A = $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$, matriz linha 1 x 3

b) Matriz coluna

É toda matriz que possui uma única coluna.
Exemplo:

$B = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 1/2 \\ -1 \end{bmatrix}$, matriz coluna 4 x 1

c) Matriz nula

É toda matriz cujos elementos são todos iguais a zero.
Indica-se por: 0
Exemplo:

$0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, matriz nula 2 x 3

d) Matriz quadrada

É toda matriz que possui o número de linhas igual ao de colunas.

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & -6 & 5 & -1 \\ 5 & 7 & 4 & 9 \\ 2 & 3 & 7 & -8 \end{bmatrix}$$

Diagonal secundária Diagonal principal

Numa matriz quadrada temos duas diagonais:

Principal: { a_{ij} | i = j }

do exemplo: { 1, -6, 4, -8 }

Secundária: { a_{ij} | i + j = n + 1 }

do exemplo: { 0, 5, 7, 2 }

e) Matriz identidade de ordem n (In)

É toda matriz quadrada n x n tal que

$$In = \delta ij = \begin{cases} 0, \text{ se } i \neq j \\ 1, \text{ se } i \neq j \end{cases}$$

(δij é o símbolo de Kronecker)

Exemplo:

$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, matriz identidade 3 x 3

f) Matriz triangular

É toda matriz quadrada n x n onde todos os elementos situados acima ou abaixo da diagonal principal são iguais a zero.

Exemplo:

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 \\ 0 & 4 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$, matriz triangular 4 x 4

Igualdade de matrizes

Definição

Duas matrizes do mesmo tipo A = a_{ij} e B = b_{ij} são iguais (indica-se A=B) se todos os elementos correspondentes (elementos com o mesmo índice) são iguais.

$$A=B \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij}$$

Exemplo

$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

São matrizes iguais pois:

$a_{11} = b_{11} = 2$, $a_{12} = b_{12} = 4$, $a_{21} = b_{21} = -1$ e $a_{22} = b_{22} = 3$

Propriedades

Reflexiva: A = A

Simétrica A = B ⇔ B = A

Transitiva A = B e B = C ⇔ A = C

Onde A, B e C são matrizes do mesmo tipo.

Exercícios

1. Escrever explicitamente a matriz A = (a_{ij})2x3 tal que a_{ij} = 2i-j + 1
   Solução
   Temos:
   a_{11} = 2.1 – 1 + 1 = 2, a_{12} = 2.1 – 2 + 1 = 1, a_{13} = 2.1 – 3 + 1 = 0
   a_{21} = 2.2 – 1 + 1 = 4, a_{22} = 2.2 – 2 + 1 = 3, a_{23} = 2.2 – 3 + 1 = 2

   Então a matriz é:

   $$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

2. Escreva explicitamente as matrizes:

   a) A = (a_{ij}) 3x2 tal que: a_{ij} = i – j

   b) B = (b_{ij}) 3x3 tal que: b_{ij} = 4i – 2j

   c) C = (c_{ij}) 4x4 tal que: $c_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ se i + j é par} \\ 0, \text{ se i + j é ímpar} \end{cases}$

   d) D = (d_{ij}) 2x3 tal que: $d_{ij} = \begin{cases} \text{i + j, se } i \leq j \\ \text{i se } i > j \end{cases}$

   e) E = (e_{ij}) 4x4 tal que: $e_{ij} = \begin{cases} 2^{i-j}, \text{ se } i < j \\ 1, \text{ se } i = j \\ i - j^2, \text{ se } i > j \end{cases}$

3. Chama-se traço de uma matriz A = (a_{ij}) nxn à soma dos elementos de sua diagonal principal.

   Calcule o traço da matriz A = (a_{ij}) 4x4, onde a_{ij} = 2i + j

4. Determine a, b, x e y tais que:

$$\begin{bmatrix} x+y & -7 \\ 3 & 2x-y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & a-2b \\ a & 4 \end{bmatrix}$$

5. Determine x. y e z tais que:

$$\begin{bmatrix} x+y+z & 3 \\ 8 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & x+y \\ 2y-z & 5 \end{bmatrix}$$

Operações com matrizes

a) Adição e Subtração

Definição

Dadas duas matrizes A = (a_{ij}) mxn e B = (b_{ij}) mxn,

1º) chama-se soma da matriz A com a matriz B, a matriz C = (c_{ij}) mxn, tal que: = $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

2º) chama-se diferença da matriz A com a matriz B, a matriz C = (c_{ij}) mxn, tal que: = $c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$

Exemplo

Sendo: $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & -6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$, temos

$$A + B = \begin{bmatrix} 3+1 & 2-6 \\ -4+7 & 5+8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ 3 & 13 \end{bmatrix}$$

$$A - B = \begin{bmatrix} 3-1 & 2+6 \\ -4-7 & 5-8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ -11 & -3 \end{bmatrix}$$

Propriedades da adição de matrizes

Sendo A, B e C matrizes do mesmo tipo, tem-se as seguintes propriedades:

Associativa: A + (B + C) = (A + B) + C
Comutativa: A + B = B + A
Elemento neutro: A + O = O + A = A
Elemento: A + (- A) = 0

Sendo A = (a_{ij}) mxn, a matriz - A = (-a_{ij}) mxn chama-se oposta de A.

- A é a oposta de A

b) Multiplicação de um número real por uma matriz

Definição.

Chama-se produto de um número real k por uma matriz A = (a_{ij}) mxn, indica-se: kA, a matriz B = (b_{ij}) mxn, onde bij = kaij

Exemplo

Sendo $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 7 & -2 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$ e k = 2, então:

$$2A = 2.\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 7 & -2 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2.1 & 2.3 \\ 2.7 & 2(-2) \\ 2.4 & 2.6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 14 & -4 \\ 8 & 12 \end{bmatrix}$$

Propriedades:

Sendo A e B matrizes do mesmo tipo e a,b números reais tem-se as seguintes propriedades:

Associativa: a(bA) = (ab)A

Distributiva em relação ao real a: a (A + B) = aA + aB

Distributiva em relação à matriz A: (a+b)A = aA + bA

Elemento neutro: 1.A = A

Exercícios

1. Dadas as matrizes

A = $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 5 & 6 & 1 \end{bmatrix}$ B = $\begin{bmatrix} -1 & 5 & 7 \\ 2 & 1 & -3 \\ 0 & 4 & 6 \end{bmatrix}$ C = $\begin{bmatrix} 5 & -7 & 4 \\ 2 & 1 & -3 \\ 0 & 4 & 6 \end{bmatrix}$

Calcule:

a) A + B f) - $^1/_2$ B

b) B + C g) $^2/_5$ (B – C)

c) A – C h) A + B – 2C

d) B – A i) -A + 4B - $^1/_3$ C

e) 3A j) $\frac{B-C}{2}$ – 4A

2. Sendo :

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$, B = $\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$ e C = $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

Verifique que A + (B + C) = (A + B) + C

3. Dadas as matrizes:

A = (a_{ij}) 3x2, onde aij = i + j e

B = (b_{ij}) 3x2, onde bij = 2 (i – j)

Calcule:
a) A + B
b) 2A – 3B

4. Sendo A, B e X matrizes do mesmo tipo, prove que:

X + A = B => X = B – A

Solução

X + A = B

(X + A) – A = B – A (subtraindo A dos dois membros)

X + (A – A) = B – A (propriedade associativa)

X + 0 = B – A => X = B – A (elemento neutro)

5. Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ e B = $\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$, obtenha a matriz x tal que X + A = B

6. Dadas as matrizes:

A = $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 2 & -2 & 5 \end{bmatrix}$, B = $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 5 & 4 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ e C = $\begin{bmatrix} -3 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 5 \\ 6 & 1 & 7 \end{bmatrix}$, obtenha a matriz X tal que: 2X – A + 4B = 3C

7. Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, B = $\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ e C = $\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, obtenha as matrizes X e Y tais que:

$$\begin{cases} 2X + Y = A + 2B \\ X - 2Y = 2B - 3C \end{cases}$$

c) Multiplicação de matrizes

Definição

Dadas as matrizes A = (a_{ij}) mxn e B = (b_{ij}) nxp, chama-se produto de A por B, a matriz C = (c_{ij}) mxp, tal que cada elemento cij é obtido somando-se os produtos obtidos pela multiplicação dos elementos da linha i da matriz A pelos elementos correspondentes da coluna j da matriz B.

Note pela definição que:

1ª) Só existe o produto de duas matrizes se o número de colunas da primeira matriz é igual ao número de linhas da segunda matriz.

2ª) Se existir, a matriz produto terá o número de linhas da primeira matriz e o número de colunas da segunda matriz.

Exemplo:

Sendo A = $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ e B = $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -3 & 5 & 7 \\ 4 & 8 & -1 \end{bmatrix}$, calcule AB

A2x3 e B3x3, então C2x3. Então:

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 5 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -3 & 5 & 7 \\ 4 & 8 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \end{bmatrix}$$

C_{11} = 3.1 + (-1) (-3) + 0.4 = 6
C_{12} = 3.2 + (-1) 5 + 0.8 = 1
C_{13} = 3.0 + (-1) 7 + 0.(-1) = -7
C_{21} = 2.1 + 5 (-3) + 6.4 = 11
C_{22} = 2.2 + 5.5 + 6.8 = 77
C_{23} = 2.0 + 5.7 + 6.(-1) = 29

Portanto: C $= \begin{bmatrix} 6 & 1 & -7 \\ 11 & 77 & 29 \end{bmatrix}$

Propriedades da multiplicação de matrizes

Sendo as matrizes A,B e C e R um número real, e supondo possíveis as operações abaixo, temos as seguintes propriedades:
Associativa: A.(B.C) = (A.B).C
Distributiva à esquerda: (A. (B + C) = AB + AC
Distributiva à direita: (A+B).C = AC + BC
Elemento neutro: Amxn.In = In.Amxn = Amxn
Associativa com escalar: k(AB) = (kA)B = A(kB)

Propriedades não válidas importante!!!!

1ª) Comutativa
Sendo A e B matrizes quadradas, em geral AB ≠ BA

2ª) Anulamento do produto
Sendo possível o produto entre duas matrizes A e B tal que AB = 0, não implica necessariamente que A = 0 ou B = 0

3ª) Cancelamento na multiplicação
Sendo possíveis os produtos AB e AC e AB = AC, não implica necessariamente que B = C

Exercícios

1. Dadas as matrizes

A = $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 4 & -2 & 5 \\ -1 & 2 & 7 \end{bmatrix}$, B = $\begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ e C = $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 6 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

Obtenha

a) AB
b) BA
c) AC
d) BC
e) A (B + C)
f) B (A – B)
g) 2AB + C^2
h) A (BC) + (AB)C
i) AI_3
j) B^2.C

2. Determine a matriz X = 3A^2 – 2A + 4I_2, sendo:

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$

3. Desenvolver $(A+B)^2$, sabendo que A e B comutam, isto é, AB = BA

Solução

$(A+B)^2$ = (A + B).(A + B) = A(A + B) + B(A + B) =
= A^2 + AB + BA + B^2 = A^2 + 2AB + B^2

4. Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$, calcule:

a) (A + B)(A – B)
b) A^2- B^2
c) $(A-B)^2$
d) A^2 - 2AB + B^2

5. Justifique porque no exercício anterior:

(A + B)(A – B) ≠ A^2- B^2
e
$(A-B)^2$ ≠ A^2 - 2AB + B^2

6. Dadas as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & -1 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 5 & 4 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Se existirem, obtenha AB e BA.

7. Determine a matriz X tal que AX = B, sendo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix}$$

8. Sendo $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$, obtenha a matriz X, tal que: AX = A – B

9. Dadas as matrizes A = a_{ij} tal que a_{ij} = 2_i + j e B = b_{ij} tal que b_{ij} = i + 3j, ambas quadradas de ordem 2. Obtenha a matriz $(A+B)^2$

10. Sabendo que $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, obtenha A^{20}

11. Sabe-se que: $A = \begin{bmatrix} x & 1 & 2 \\ 3 & y & 5 \\ 2 & 3 & z \end{bmatrix}$, B = b_{ij} é uma matriz diagonal (b_{ij} = 0 se i ≠ j) e $AB = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 10 \\ 6 & 12 & 25 \\ 4 & 9 & 20 \end{bmatrix}$

Calcule z, y e z

Matriz Transposta

Definição
Chama-se transposta da matriz A, a matriz A^t cujas colunas são ordenadamente as linhas de A.
Exemplo:

Sendo

Note que a 1ª coluna de A^t é a 1ª linha de A e a 2ª coluna de A^t é a 2ª linha de A.

Propriedades

$(A^t)^t$ = A
$(A + B)^t$ = A^t + B^t
$(AB)^t$ = A^t. B^t
$(kA)^t$ = k. A^t, k ϵ IR

Exercícios

1. Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ e $A = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$, obtenha:

a) A^t
b) B^t
c) $(A + B)^t$
d) $(2A)^t$
e) $2A^t$
f) $(3A + 2B)^t$
g) $(A^t + B^{t)})^t$
h) A^t + $2B^t$ - A

2. Sendo $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$, verifique que $(AB)^t$ = B^t. A^t

3. Supondo que existam os produtos, prove que: $(ABC)^t$ = C^t. B^t. A^t supondo a 3ª propriedade.

4. Uma matriz quadrada A se diz simétrica se A = A^t. Determine x, y e z para que a matriz.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & y-1 \\ x & 3 & z+1 \\ 2y & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Seja simétrica

5. Sendo $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 4 & 2 & -3 \\ 6 & -7 & -1 \end{bmatrix}$, verifique que A + A^t é simétrica

Matriz Inversa

Definição

Seja A uma matriz quadrada de ordem n. Se existir a matriz A^{-1} de ordem n tal que:

$$A.A^{-1} = A^{-1}.A = In$$

então A^{-1}é chamada de inversa de A.

Exemplo

Determine a inversa da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$

Sendo $A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, temos pela definição:

$A.A^{-1} = I_2$ => $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} a+2c & b+2d \\ 3a-c & 3b-d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\begin{cases} a + 2c = 1 \\ 3a - c = 0 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{1}{7} \text{ e } c = \frac{3}{7}$

$\begin{cases} b + 2d = 0 \\ 3b - d = 1 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{2}{7} \text{ e } c = -\frac{1}{7}$

Então a inversa de A é: $A^{-1} \begin{bmatrix} 1/7 & 2/7 \\ 3/7 & -1/7 \end{bmatrix}$

Considerações

1ª) Se a matriz A possui inversa então ela é chamada de inversível, invertível ou não singular. Se A não for inversível, dizemos que A é uma matriz singular.

2ª) Se A.A^{-1} = In, então A^{-1}.A = In

3ª) A inversa de uma matriz inversível é única.

Exercícios

1. Determine a inversa das seguintes matrizes:

a) $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ b) $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$ c) $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$

2. Mostre que a matriz $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$ não admite inversa.

3. Sendo X, A e B matrizes quadradas de ordem n e A inversível, prove que:

$$XA = B \Rightarrow X = BA^{-1}$$

Solução

XA = B ⇒ (XA)A^{-1} = BA^{-1} ⇒ X (AA^{-1}) = BA^{-1} ⇒

⇒ XI_n = BA^{-1} ⇒ X = BA^{-1}

4. Calcule a matriz X tal que AX = B, sendo:

$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ e $\mathrm{B} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

5. Sendo: $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ e $\mathrm{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$, determine a matriz X nos seguintes casos:

a) X = $(AB^{-1})^t$
b) X = $B^{-1}.A^{-1}$
c) AX = B
d) (A + X) B = A

Determinantes

a) Determinante de uma matriz de ordem n ≤ 3

Definição

Dada uma matriz quadrada A de ordem n ≤ 3, chama-se determinante da matriz A, ao número associado à mesma da seguinte forma:

1ª) Se n = 1, A = $[a_{11}]$

detA = $|a_{11}|$ = a_{11}

Exemplos

A = [2] $\Rightarrow$ detA = | 2 | = 2

B = [-7] $\Rightarrow$ detB = | -7| = -7

2ª) Se n = 2, A = $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$

$$detA = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \,.\, a_{22} - a_{12} .\, a_{21}$$

O detA é a diferença entre os produtos dos elementos das diagonais principal e secundária.

Exemplos

$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow$ det A = $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}$ = 2.5 – 3.1 = 7

$B = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow$ det B = $\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 6 \end{vmatrix}$ = 2.6 – (-4).1 = 16

3ª) Se n=3, $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

O determinante de uma matriz quadra de ordem 3 pode ser calculado pela REGRA DE SARRUS:

Indica-se o determinante da matriz A, repetindo-se após a 3ª coluna as duas colunas iniciais.

$$\left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

$$- \quad - \quad - \qquad\qquad + \quad + \quad +$$

Efetua-se as multiplicações indicadas pelas flechas mantendo-se o sinal **+** ou trocando-se o sinal dos produtos indicados por **-** , somando-se os resultados assim obtidos.

detA = $a_{11}a_{22}a_{33}$+ $a_{12}\, a_{23}a_{31}$+ $a_{13}a_{21}a_{32}$ - $a_{13}a_{22}a_{31}$ - $a_{11}a_{23}a_{32}$ - $a_{12}a_{21}a_{33}$

Exemplos

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 7 \end{bmatrix} \Rightarrow$ detA = $\left|\begin{matrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 7 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{matrix}$ = 21 + 8 + 5 – 30 – 2 – 14

-30 -2 -14 21 8 5

detA = -12

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow detB = \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & -5 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right| = 4 - 10 - 9 + 2 + 15 - 12$$

2 15 -12 4 -10 -9

detB = -10

Note a diferença na representação de uma matriz A e do seu determinante:

Matriz A: $\begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}$ ou $\begin{Vmatrix} \quad \end{Vmatrix}$

Determinante da matriz A: $\begin{vmatrix} \quad \end{vmatrix}$

Exercícios

1. Calcule os seguintes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix}$ e) $\begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$ f) $\begin{vmatrix} -2 & -5 \\ -3 & -1 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}$ g) $\begin{vmatrix} senx & cosx \\ -cosx & senx \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix}$ h) $\begin{vmatrix} log_2 4 & 8 \\ 1 & log_2 16 \end{vmatrix}$

2. Calcule os seguintes determinantes:

$a)$ $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$

$d)$ $\begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -3 \\ 2 & -3 & 4 \end{vmatrix}$ e) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 5 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ f) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -3 & -3 & -3 \end{vmatrix}$

3. Resolva as equações:

$a)$ $\begin{vmatrix} x & 1 & 2x \\ x+2 & -x & 8 \\ 3 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 0$ b) $\begin{vmatrix} x+1 & x & 3 \\ x+4 & 2 & 4x \\ 0 & -1 & 6 \end{vmatrix} = 0$ c) $\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ x & x+1 & 1 \\ x & 1 & x+2 \end{vmatrix} = 0$

4. Resolva a inequação:

$$\begin{vmatrix} 1 & x-1 & -1 \\ \frac{x}{2} & 5 & x \\ 3 & 2x & 3 \end{vmatrix} \le 0$$

b) <u>Cofator</u>

<u>Definição</u>

Dada uma matriz A = (a_{ij}) de ordem n ≥ 2, chama-se <u>cofator</u> do elemento a_{ij}, ao número real:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}.M_{ij}$$

onde M_{ij} é o determinante da matriz que se ontem suprindo-se a linha i e a coluna j de A.

M_{ij} é chamado <u>Menor complementar</u> ou <u>complemento algébrico</u> do elemento a_{ij}

Exemplos

1º) Determine o cofator do elemento a_{31} da matriz:

$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $A_{31} = (-1)^{3+1} . \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}$ = 1 . (-7) = -7

2º) Determine o cofator do elemento b_{23} da matriz:

$B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$, $B_{23} = (-1)^{2+3} . \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$ = (-1) (-4) = 4

3º) Determine os cofatores dos elementos c_{13} e c_{41} da matriz:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$C_{13} = (-1)^{1+3} . \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$ = 1 . 11 = 11

$C_{41} = (-1)^{4+1} . \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix}$ = (-1) . (-8) = 8

c) Determinante de uma matriz de ordem n > 1

Teorema de Laplace

O Determinante de uma matriz de ordem n > 1 é igual a soma dos produtos dos elementos de uma fila qualquer (linha ou coluna) pelos respectivos cofatores.

Exemplos

1º) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 2 . (-1)^{1+2} . \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 0 . (-1)^{2+2} . \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 2 (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$

= 2 (-1) . (-2) + 2 (-1) (-13) = 30

- desenvolvido pela 2ª coluna

2º) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 1 . (-1)^{3+1} . \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + 2 . (-1)^{3+2} . \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 0 (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}$

= 1 . 1 . 4 + 2 (-1) (-13) = 30

- desenvolvido pela 3ª linha

3) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & \boxed{0} \\ 1 & 0 & 3 & \boxed{1} \\ -4 & -2 & 2 & \boxed{0} \\ 1 & 3 & 0 & \boxed{2} \end{vmatrix} = (-1)^{2+4} . 1 . \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -4 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{4+4} . 2 . \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ -4 & -2 & 2 \end{vmatrix}$

= 1 . 1 . (-24) + 2 . 1 . (-12) = - 48

Note que para calcularmos determinantes de matrizes de ordem n > 1, quanto maior for n, mais produtos teremos que calcular e, portanto, é conveniente utilizamos o Teorema de Laplace desenvolvendo o mesmo pela fila (linha ou coluna) que possuir maior quantidade de zeros.

Exercícios

Calcule pelo Teorema de Laplace os seguintes determinantes:

$a) \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} -2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 4 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$

$d) \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -5 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ e) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

f) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ g) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

h) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ i) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & 5 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$

Propriedades dos determinantes

São válidas as seguintes propriedades para o determinante de uma matriz A de ordem n:

1ª) São iguais os determinantes de uma matriz e de sua transposta. **detA = det A^t**

Exemplo:

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 6 \\ 3 & 5 & -2 \end{bmatrix}$ e $A^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ -1 & 6 & -2 \end{bmatrix}$

detA = det $A^t = 10$

2ª) Se os elementos de uma fila qualquer (linha ou coluna) da matriz A forem todos nulos, então detA = 0.

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$ $\Rightarrow$ detA = 0

3ª) Multiplicando-se os elementos de uma fila qualquer (linha ou coluna) da matriz A por um número real k, obtemos a matriz B = k.A tal que:

detB = k.detA

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$ $\Rightarrow$ detA = -7

Vamos obter a matriz B multiplicando a 1ª linha da matriz A por 5:

$$B = \begin{bmatrix} 5 & 10 & 15 \\ -1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$ $\Rightarrow$ detB = -35

Note que detB = 5.detA

<u>Aplicação:</u>

$$\begin{vmatrix} 17 & 51 & -34 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 17 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 17(-5) = -85$$

Podemos “colocar em evidência” o fator comum de uma fila (linha ou coluna).

4ª) Se a matriz A possui duas filas (linha ou coluna) paralelas com elementos correspondentes proporcionais, então detA = 0

Exemplos:

1ª) A = $\begin{bmatrix} 4 & 8 & -4 \\ -1 & -2 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}$ $\Rightarrow$ detA = 0

Pois: Linha 1 = - 4 linha 2, isto é: $\frac{4}{-1} = \frac{8}{-2} = \frac{-4}{1} = -4$

2ª) A = $\begin{bmatrix} 5 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ $\Rightarrow$ detA = 0

Pois: Coluna 1 = Coluna 3 isto é: $\frac{5}{5} = \frac{3}{3} = \frac{4}{4} = 1$

5ª) Se trocarmos de posição duas filas (linha ou coluna) paralelas da matriz A, obtemos uma matriz B, tal que:

detB = -detA

A = $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 6 & 1 \\ 4 & -2 & 3 \end{bmatrix}$ $\Rightarrow$ detA = 40

Vamos obter a matriz B trocando de posição a 1ª com a 3ª coluna.

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 6 & 3 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{detB} = -40$$

Note que detB = -detA.

6ª) Teorema de Jacobi

Adicionando-se a uma fila (linha ou coluna) de uma matriz A, uma outra fila paralela previamente multiplicada por uma constante, obtemos uma matriz B tal que:

detB = detA

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & 4 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{detA} = 22$$

Vamos obter a matriz B adicionando-se aos elementos da 2ª linha os correspondentes elementos da 1ª linha multiplicados por 3.

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 13 & 11 & -1 \\ -2 & 4 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{detB} = 22$$

Consequência

Se uma fila de uma matriz A é combinação linear de outras filas paralelas, então detA = 0.

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & -4 \\ 11 & 13 & -8 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{detA} = 0$$

Linha 3 = 2 Linha 1 + 3 Linha 2

Nota:
Sejam f_1, f_2, ..., f_n filas paralelas de uma matriz de ordem n. A fila f_1 é combinação linear de f_2, f_3, ..., f_r, r ≤ n – 1, se existirem os números reais α_2, α_3, ..., α_r tal que:

$$f_1 = \alpha_2 f_2 + \alpha_3 f_3 + \ldots + \alpha_r f_r$$

7ª) Teorema de BINET

Sendo A e B matrizes de mesma ordem, então:

det(AB) = detA . detB

Exemplo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{detA} = 5$$

$$B = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{detB} = 14$$

$$AB = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 11 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{det(AB)} = 70$$

Note que det(AB) = 70
detA.detB = 5.14 = 70

8ª) O determinante de uma matriz triangular é igual ao produto dos elementos da diagonal principal.

Exemplo:

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 7 & 20 \\ 0 & 6 & 5 & -10 \\ 0 & 0 & 8 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 2 \, . \, 6 \, . \, 8 \, . \, 5 = 480$$

Exercícios

1. Usando propriedades dos determinantes, mostre que:

a) $\begin{vmatrix} a & r & a+2r \\ b & r & b+2r \\ c & r & c+2r \end{vmatrix} = 0$ b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & a+c & a+b \end{vmatrix} = 0$

2. Sendo $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = m$, obtenha:

a) $\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 2a & 2b \\ 3c & 3d \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} a & b \\ 2a+c & 2b+d \end{vmatrix}$

3. Resolva a equação

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 2 & x \\ 0 & x+1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & x+2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2x+1 \end{vmatrix} = 0$$

4. Mostre que:

$$\begin{vmatrix} bc & a & a^2 \\ ac & b & b^2 \\ ab & c & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix}$$

5. Mostre que:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+c \end{vmatrix} = abc$$

6. Seja a matriz A de ordem 3 tal que detA = 6 e $\mathrm{B} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 6 \end{bmatrix}$. Sendo C = AB, calcule detC

7. Prove que , se A é inversível, então detA ≠ 0.

8. Qual a condição para que a matriz abaixo seja inversível:

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} a & 1 & 1 \\ 2 & 2 & a \\ 2 & 2 & a \end{bmatrix}$$

9. Determine a condição para que seja inversível a seguinte matriz:

$$\begin{bmatrix} sen_x & cos_x & 0 & 1 \\ sen_x & cos_x & 0 & 0 \\ sen_x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Regra de CHIÓ

A Regra de CHIÓ tem por base a transformação de uma matriz A de ordem n ≥ 2 numa matriz B de ordem (n-1), facilitando assim o cálculo do determinante de A.
Abaixo descrevemos os passos desta regra.

1º) Suprimimos a linha e a coluna de A que se interceptam no elemento a_{rs} = 1

2º) De cada elemento a_{ij} restante da matriz, subtraímos o produto dos elementos que se encontram nas intersecções da linha i e da coluna j, com a coluna s e linha r, respectivamente.

3º) Com essas diferenças obtidas, construímos a matriz B tal que: detA = $(-1)^{r+s}$. detB.

Exemplos

1º) $\begin{vmatrix} 4 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 0 & -2 \end{vmatrix} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 4-2.3 & -1-(-2).3 & 2-0.3 \\ 3-2(-1) & 2-(-2)(-1) & 3-0(-1) \\ -1-2.4 & 0-(-2).4 & -2-0.4 \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} -2 & 5 & 2 \\ 5 & 0 & 3 \\ -9 & 8 & -2 \end{vmatrix} = 43$

2º) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix}$

Como não aparece o elemento a_{rs} = 1, aplicando o teorema de Jacobi, podemos somar na 2ª coluna os correspondentes elementos da 1ª coluna, multiplicados por (-1). Temos, então:

$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 4 & -2 & -3 \\ 3 & -5 & 4 \end{vmatrix} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 4-2(-2) & -3-2(-2) \\ 3-2(-5) & 4-2(-5) \end{vmatrix} =$

$-1 . \begin{vmatrix} 8 & 1 \\ 13 & 14 \end{vmatrix} = -99$

Exercícios

1. Calcule pela regra de CHIÓ os determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 & 3 \\ -1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 3 & 6 & 5 \\ -1 & 4 & 2 \\ 7 & 2 & 8 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 7 & -13 & 1 \\ -5 & 10 & -1 \\ 1 & -4 & 0 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 & 14 \\ 12 & -1 & 9 & 7 \\ 8 & -1 & 5 & 11 \\ 5 & -2 & 11 & -9 \end{vmatrix}$

e) $\begin{vmatrix} 3 & -7 & 6 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 13 & 27 \\ -1 & -2 & 4 & 8 \end{vmatrix}$

2. Resolva a equação:

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x+1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x+2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x+3 \end{vmatrix} = 0$

3. Resolva as equações:

a) $\begin{vmatrix} x & 1 & x \\ x & x+2 & x^2+x \\ x & 1 & x \end{vmatrix} = 0$ b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & x \\ x & 1 & x & 0 \\ x & x & 1 & 0 \\ x & 1 & 0 & x \end{vmatrix} = 0$ c) $\begin{vmatrix} x & 1 & 2 & 3 \\ x & x & 4 & 5 \\ x & x & x & 6 \\ x & x & x & x \end{vmatrix} = 0$

4. Para quais valores reais de x tem-se $\begin{vmatrix} 1 & x & x & 0 \\ x & 1 & 0 & x \\ x & 0 & 1 & x \\ 0 & x & x & 1 \end{vmatrix} \geq 0$

Matriz de Vandermonde

Definição

Chama-se matriz de Vandermonde ou das potências, toda matriz de ordem n ≥ 2 da forma:

$$V = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a^2{}_1 & a^2{}_2 & a^2{}_3 & \dots & a^2{}_n \\ . & . & . & . & . \\ a^{n-1}{}_1 & a^{n-1}{}_2 & a^{n-1}{}_3 & \dots & a^{n-1}{}_n \end{bmatrix}$$

Note que:
Os elementos de uma mesma linha são potências de expoentes iguais.
Os elementos de uma mesma coluna são potências sucessivas com mesma base e expoentes de 0 a (n-1).
Os elementos da 2ª linha são bases das potências e são chamados elementos característicos da Matriz de Vandermonde.

Exemplo:

$$V = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 9 & 16 & 25 \\ 8 & 27 & 64 & 125 \end{bmatrix}$$

Teorema
Prova-se que:
O determinante de uma matriz de Vandermonde é igual ao produto de todas as diferenças a_{k+1} - a_k , k = 1, 2,..., n, onde n é a ordem da matriz, dos seus elementos característicos.

Exemplo

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 9 & 16 & 25 \\ 8 & 27 & 64 & 125 \end{vmatrix} = (5-4)(5-3)(5-2)(4-3)(4-2)(3-2) = 1.2.3.1.2.1 = 12$$

Exercícios

1. Calcule os seguintes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & 16 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 16 \\ 1 & 5 & 25 \end{vmatrix}$

2. Calcule os determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 1 & a^2 & a \\ 1 & b^2 & b \\ 1 & a^6 & a^3 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 3 & 7 \\ 4 & 25 & 9 & 49 \\ 8 & 125 & 27 & 343 \end{vmatrix}$

3. Calcule o valor de X para que o determinante abaixo seja igual a-108.

$$\begin{vmatrix} x^2 & x^2 & x^2 & x^2 \\ 5 & 2 & 3 & 4 \\ 25 & 4 & 9 & 16 \\ 125 & 8 & 27 & 64 \end{vmatrix}$$

4. Calcule o valor do determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ log3 & log30 & log300 \\ log^2 3 & log^2 30 & log^2 300 \end{vmatrix}$$

5. Resolver as equações:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & x^2 & x^3 \\ x^2 & x^4 & x^6 \end{vmatrix} = 0$ b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \end{vmatrix} = 0$ c) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & x & x^2 \\ 4 & 4 & x^2 & x^4 \\ -8 & 8 & x^3 & x^6 \end{vmatrix} = 0$

6. (EPUSP) Quais as raízes do polinômio

P(x) = $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & 1 & 2 & 3 \\ x^2 & 1 & 4 & 9 \\ x^3 & 1 & 8 & 27 \end{vmatrix}$

7. Mostre que:

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ {a^2}_1 & {a^2}_2 & {a^2}_3 \end{vmatrix} = (a_3 - a_2)\,(a_3 - a_1)\,(a_2 - a_1)$

Sistemas lineares

a) Equação linear

É toda equação do tipo:

$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b$

Onde:
$a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}$ são números reais chamados de coeficientes das incógnitas ou variáveis $x_1, x_2, \dots, x_n$ b é o número real chamado termo independente

Exemplos

$3x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 = 16$
$x - 2y + z = 1$

b) Solução de uma equação linear

Uma solução de uma equação linear é toda n-upla ordenada $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ de números reais que a torna verdadeira.

Por exemplo, a quádrupla (1, 2, 3, 4) é uma solução da equação linear $3x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 = 16$, pois:

3.1 + 4.2 -3 + 2.4 = 16

Note que (5, -3, 3, 8), (2, 1, 2, 4), (0, 4, 0, 0) são também algumas soluções.

c) Sistema linear

Chama-se sistema linear mxn (lê-se: m por n) todo conjunto de m (m ≥ 1) equações lineares a n incógnitas.

Genericamente temos:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_2 + a_{22}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_n \end{cases}$$

Podemos associar a todo sistema linear as seguintes matrizes:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_n \end{bmatrix}$$

Chamadas matriz incompleta e matriz completa, respectivamente.

Uma solução do sistema linear é toda n-upla ordenada $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ de números reais que são soluções de todas as equações lineares que formam o sistema.

Exemplos

1) $\begin{cases} 2x + 3y - z = 5 \\ 3x - y + 2z = 7 \\ X + y + z = 6 \end{cases}$

É um sistema linear 3x3 cuja solução é (1, 2, 3), pois:

$\begin{cases} 2.1 + 3.2 - 3 = 5 \\ 3.1 - 2 + 2.3 = 7 \\ 1 + 2 + 3 = 6 \end{cases}$ Neste caso a solução do sistema é única.

2º) $\begin{cases} x + 3y = 2 \\ 2x + 6y = 4 \end{cases}$

É um sistema linear 2x2 que apresenta infinitas soluções. Algumas delas são: (-1, 1), (2, 0) e (0, $\frac{2}{3}$).

3º) $\begin{cases} 2x + y = 2 \\ 4x + 2y = 3 \end{cases}$

É um sistema linear 2x2 que não possui solução.

NOTA

Se b_1 = b_2 = ... = b_n, o sistema linear é chamado homogêneo, e neste caso admite pelo menos a solução (0, 0, ..., 0) chamada trivial.
Por exemplo, o sistema abaixo é homogêneo e admite a solução (0, 0, 0).

$$\begin{cases} X + 2y - z = 0 \\ 4x + 7y + 9z = 0 \\ 5x - y + 2z = 0 \end{cases}$$

d) Classificação dos sistemas

1ª) Sistema impossível ou incompatível

Não possui solução.
É o caso do 3º exemplo.

2ª) Sistema possível ou compatível

Possui pelo menos uma solução, podendo ser:

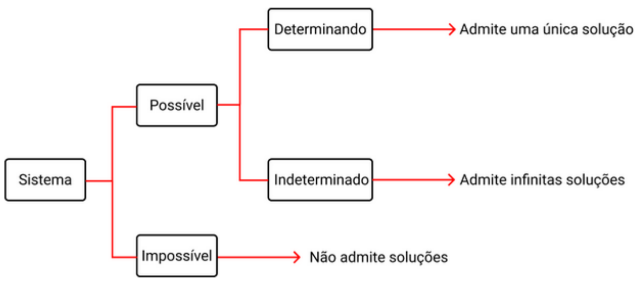
Possível e determinado: a solução é única. É o caso do 1º exemplo.

Possível e indeterminado: a solução não é única, apresentando infinitas soluções. É o caso do 2º exemplo.

Os sistemas lineares são classificados de acordo com o número de soluções apresentados por ele. Assim, os sistemas lineares podem ser classificados como:

- ***SPD* – Sistema Possível e Determinado – possui uma única solução.**
- ***SPI* – Sistema Possível e Indeterminado – possui infinitas soluções.**
- ***SI* – Sistema Impossível – não possui solução.**

O fluxograma a seguir mostra como as soluções dos sistemas são divididas:



e) Sistema linear normal

É todo sistema onde são iguais o número de equações e de incógnitas e o determinante da matriz incompleta associada ao mesmo é diferente de zero.
Todo sistema linear normal pode ser representado por uma equação matricial do tipo AX = B

Exemplo:

$$\begin{cases} x + y - 2z = 4 \\ 2x - 3y + 5z = 1 \\ 5x + y - z = 2 \end{cases} \text{ ou } \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -3 & 5 \\ 5 & 1 & -1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

3 equações e 3 incógnitas

Resolução de Sistemas Lineares

a) Método do escalonamento

Definição

Um sistema linear se diz escalonado se o número de coeficientes nulos de cada equação, a partir da segunda, é maior que o número de coeficientes nulos da equação anterior.
Exemplos

1) $$\begin{cases} x + 2y - z = 8 \\ 0x + y + 3z = -7 \\ 0x + 0y - 2z = 6 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x + 2y - z = 8 \\ y + 3z = -7 \\ -2z = 6 \end{cases}$$

Vamos resolver este sistema:

Na 3ª equação encontramos z = -3

Substituindo z = -3 na 2ª equação:

y + 3 (-3) = -7 ⇒ y = 2

Substituindo y = 2 e z = -3 na 1ª equação:

x + 2.2 – (-3) = 8 ⇒ x = 1

logo: V = {(1, 2, -3)}

2) $$\begin{cases} 2x - y + 7z = -1 \\ 0x + 4y - z = 2 \\ 0x - 0y + 0z = 5 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} 2x - y + 7z = -1 \\ 4y - z = 2 \\ 0z = 5 \end{cases}$$

A 3ª equação 0z = 5 não admite solução, logo é impossível resolver este sistema. Então: V = ∅

O Método do escalonamento consiste em resolver um sistema linear qualquer, transformando-o num sistema escalonado, através das seguintes operações elementares:

1ª) Trocar entre si duas equações do sistema.
2ª) Multiplicar uma equação por um número real não nulo.
3ª) Somar numa equação uma outra equação previamente multiplicada por um número real não nulo.

Exemplo

Resolver por escalonamento o sistema:

$$\begin{cases} 2x + 3y - 5z = 3 \\ x - y + 2z = 8 \\ 3x - y + z = 16 \end{cases}$$

Permutando as equações 1 e 2, temos:

$$\begin{cases} x - y + 2z = 8 \\ 2x + 3y - 5z = 3 \\ 3x - y + z = 16 \end{cases} \qquad \begin{cases} x - y + 2z = 8 \\ 5y - 9z = -13 \\ 2y - 5z = -8 \end{cases}$$

$E_2 \Rightarrow E_2 + (-2)\ E_1$ $\qquad\qquad$ $E_3 \Rightarrow 2E_2 + (-5)\ E_3$

$E_3 \Rightarrow E_3 + (-3)\ E_1$

$$\begin{cases} x - y + 2z = 8 \\ 5y - 9z = -13 \\ \quad 7z = 14 \end{cases}$$

Na 2ª equação: 5y – 9.2 = -13 ⇒ y = 1

Na 1ª equação: x – 1 + 2.2 = 8 ⇒ x = 5

Logo V = {(5, 1, 2)}

Podemos utilizar também a notação de matriz na resolução por escalonamento, escrevendo inicialmente a matriz completa.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 8 \\ 3 & -1 & 1 & 16 \end{array}\right] \xrightarrow[L_1\ e\ L_2]{Trocando} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 8 \\ 2 & 3 & -5 & 3 \\ 3 & -1 & 1 & 16 \end{array}\right] \xrightarrow[L_3 + (-3)\ L_1]{L_2 + (-2)L_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 8 \\ 0 & 5 & -9 & -13 \\ 0 & 2 & -5 & -8 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{2L_2 + (-5)L_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 8 \\ 0 & 5 & -9 & -13 \\ 0 & 0 & 7 & 14 \end{array}\right]$$

Temos: 7z = 14 ⇒ z = 2

5y – 9z = -13 ⇒ 5y – 18 = -13 ⇒ y = 1

X – y + 2z = 8 ⇒ x – 1 + 4 = 8 ⇒ x = 5

V = {(5.1, 2)}

Exercícios

1. Resolver por escalonamento os seguintes sistemas:

a) $\begin{cases} 3x + 2y = 4 \\ 2x - 3y = 7 \end{cases}$ $\qquad$ b) $\begin{cases} 3x + 2y + 3z = 9 \\ x - y + 2z = 2 \\ 2x + y - 2z = 10 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 3x + y + z = 8 \\ 5x + 3y + 4z = 10 \end{cases}$ $\qquad$ d) $\begin{cases} 5x + 3z = 6 \\ 2x - 3y = -6 \\ 2y + 3z = -1 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x + 2y + 2z + 2t = 1 \\ x + 2y + 3z + 3t = 1 \\ x + 2y + 3z + 4t = 0 \end{cases}$ $\qquad$ f) $\begin{cases} a + 2b + c + e = 7 \\ 2a + b - c - d = -1 \\ a - b + d + 3e = 6 \\ b - 2c + d + 2e = 6 \\ a + c + 3d - e = -3 \end{cases}$

2. Resolver por escalonamento os seguintes sistemas:

a) $\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ 2x + 3y - 4z = 0 \\ 3x + 4y - 9z = 0 \end{cases}$

Solução

$\begin{cases} E_2 \Rightarrow E_2 + (-2)E_1 \\ E_3 \Rightarrow E_3 + (-3)\ E_1 \end{cases}$ $\qquad$ $\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ -y - 6z = 0 \\ -2y - 12z = 0 \end{cases}$ $\qquad$ $\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ -y - 6z = 0 \\ 0z = 0 \end{cases}$

$E_3 \Rightarrow E_3 + (-2)E_2$

A equação 0z = 0 é verdadeira para todo z real, portanto, o sistema é possível e indeterminado.

Para obtermos as infinitas soluções atribuímos a uma incógnita um valor variável (k) e obtemos as demais incógnitas em função dessa variável.

Fazendo z=k, kER, então:

na 2ª equação: -y – 6k = 0 ⇒ y = -6k
na 1ª equação: x + 2 (-6k) + k = 0 ⇒ x = 11k
logo: V = {(11k, -6k, k), kεR}

Atribuindo valores reais a k obtemos as infinitas soluções.

b) $\begin{cases} 8x + 2y = 14 \\ 12x + 3y = 21 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + y + 3z = 2 \\ 3x + 4y + 2z = 3 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x + 2y - z - t = 0 \\ 3x - 2y + z + 3t = 0 \\ 2x + y - 2z + t = 0 \\ 3x - 7y + 5z + 6t = 0 \end{cases}$

3. Resolver por escalonamento os seguintes sistemas:

a) $\begin{cases} 2x + y - 3z = 1 \\ 3x - y + 2z = 2 \\ 7x + y - 4z = 0 \end{cases}$

Solução

$E_2 \Rightarrow -2E_2 + (3)E_1$
$E_3 \Rightarrow -2E_3 + 7\,E_1$

$\begin{cases} 2x + y - 3z = 1 \\ 5y - 13z = -1 \\ 5y - 13z = 7 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x + y - 3z = 1 \\ 5y - 13z = -1 \\ 0z = 8 \end{cases}$

$E_3 \Rightarrow E_3 + (-1)E_2$

A equação 0z = 8 é falsa para todo z real, logo o sistema é impossível. V = 0

Note que a 2ª e a 3ª equações tem os primeiros membros iguais (5y – 13z) e 2^{os} membros diferentes (-1 e 7), o que já poderíamos concluir que o sistema é impossível.

b) $\begin{cases} 12x + 15y = 21 \\ 8x + 10y = 7 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 5 \\ 2x + 3y + 4z = 3 \\ x + 3y + 5z = 1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + 2y + z = 5 \\ 2x - y + z = 7 \\ x - 2y + 2z = -1 \\ 3x - y + 4z = 11 \end{cases}$

4. Resolver por escalonamento os sistemas:

a) $\begin{cases} 2x + 3y = 9 \\ 3x - 5y = -34 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ 2x - y + 3z = 0 \\ x - 4y - z = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ 5x + z = 6 \\ 2y - 3z = -7 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x + y - 2z = 3 \\ 3x - y + 3z = 3 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 2x + 2y + z = 5 \\ x - 2y + z = 3 \\ 2x + 2y - 3z = 1 \end{cases}$ f) $\begin{cases} a + 3b + c - d = 3 \\ a - 2b + 2c + d = 7 \\ 2a - b + c - 2d = 4 \\ -a + b - c + d = -1 \end{cases}$

g) $\begin{cases} x+y+z+w=2 \\ x+2y+2z+2w=5 \\ x+2y+3z+3w=8 \\ x+2y+3z+4w=10 \\ 4x+3y+2z+w=0 \end{cases}$

h) $\begin{cases} 3x+y-2z=2 \\ 2x-y+4z=3 \\ 4x+3y-8z=1 \end{cases}$

i) $\begin{cases} x+y+z+t=1 \\ 2x+y+z-t=3 \\ x-2y+z-t=2 \\ 3x+5y+2z+2t=3 \end{cases}$

j) $\begin{cases} x+2y+z=5 \\ 2x-y+3z=1 \\ x+y-2z=4 \\ 3x+3y+10z=7 \end{cases}$

k) $\begin{cases} x+2y+3z=5 \\ 2x+6y+z=9 \end{cases}$

b) Regra de Cramer

_A regra de Cramer é utilizada para resolver sistemas lineares normais .(nº de equações = nº de incógnitas)
Vamos explicar esta regra através do seguinte exemplo:

$$\begin{cases} x - y + 2z = 6 \\ 3x + 2y - z = 13 \\ -2x + y + z = -11 \end{cases}$$

Sejam:
D o determinante da matriz incompleta
Dx o determinante da matriz obtido da matriz incompleta, substituindo a coluna dos coeficientes de x pelos termos independentes.
Dy o determinante da matriz obtido da matriz incompleta, substituindo a coluna dos coeficientes de z pelos termos independentes.
Então:

$\mathrm{D} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ = 18

$\mathrm{Dx} = \begin{vmatrix} 6 & -1 & 2 \\ 13 & 2 & -1 \\ -11 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ = 90

$\mathrm{Dy} = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 2 \\ 3 & 13 & -1 \\ -2 & -11 & 1 \end{vmatrix}$ = -18

$\mathrm{Dz} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 6 \\ 3 & 2 & 13 \\ -2 & 1 & -11 \end{vmatrix}$ = 0

Encontramos os valores de x, y, z, fazendo:

X = $\frac{Dx}{D}$, Y = $\frac{Dy}{D}$ e Z = $\frac{Dz}{D}$

Logo:

X = $\frac{90}{18}$ = 5

Y = $\frac{-18}{18}$ = -1

Z = $\frac{0}{18}$ = 0

V = {(5, -1, 0)}

Note que o sistema só admite solução de D ≠ 0

Discussão de Sistemas Lineares por Cramer

Sejam D e A = {Dx, Dy, Dz, ...} os determinantes de um sistema linear normal definidos pela regra de Cramer.

1º) Se D ≠ 0 o Sistema é possível e determinado, isto é, apresenta uma única solução.

2º) Se D = 0 e todos os determinantes de A forem nulos, o sistema é possível e indeterminado, isto é, apresenta infinitas soluções.

De fato, como D = 0, Dx = 0 (por exemplo), e x = $\frac{Dx}{D}$ teríamos XD = DX e portanto 0X -= 0 que admite infinitas soluções.

3º) Se D = 0 e pelo menos um dos determinantes de A não for nulo, o sistema é impossível, isto é, não apresenta solução,

De fato como D = 0, supondo DX ≠ 0 e como XD = DX, então 0X = DX que não possui solução.

Exemplo

Discutir o Sistema por Cramer

$$\begin{cases} x + y = a \\ a^2x + y = a^2 \end{cases}$$

<u>Solução</u>

D = $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a^2 & 1 \end{vmatrix}$ = 1 - a^2 Dx = $\begin{vmatrix} a & 1 \\ a^2 & 1 \end{vmatrix}$ = a - a^2

Dz = $\begin{vmatrix} 1 & a \\ a^2 & a^2 \end{vmatrix}$ = $a^2 - a^3$

D = 0 $\Rightarrow$ 1 - $a^2 = 0 \Rightarrow$ a = ± 1
Dx = 0 $\Rightarrow$ a - $a^2 = 0 \Rightarrow$ a (1-a) = 0 $\Rightarrow$ a = 0 ou a = 1
Dy = 0 $\Rightarrow$ $a^2 - a^3 = 0 \Rightarrow a^2(1-a) = 0 \Rightarrow$ a = 0 ou a = 1

Se a ≠ ± 1 (D≠0) o sistema é possível e determinado.
Se a = 1 (D=Dx=Dy= 0) o sistema é possível e indeterminando.
Se a = -1 (D=0, Dx≠0, Dy≠0) o sistema é impossível.

Exercícios

1. Resolver, pela Regra de Cramer, os sistemas:

a) $\begin{cases} 2x - 3y = 14 \\ 3x + y = 10 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 3x + 2y = -3 \\ 3x - 2y = -7 \\ 3y + z = 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + 3y - z = 5 \\ 2x - y + z = 0 \\ 3x + 2y - z = 6 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 2x - y - z = 10 \\ x - 2y - z = 4 \\ x - y - 2z = 6 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x + 3y - z = -3 \\ x + 2z = 9 \\ -x + 2y + z = -4 \end{cases}$

g) $\begin{cases} x - y + z = 2 \\ y - z + t = 1 \\ x + z - t = 4 \\ -x + y + t = -1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x + 3y + z = 0 \\ 3x + 5y + 4z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases}$

2. Classifique, por Cramer os sistemas:

a) $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x - y + z = 2 \\ 2x + y - z = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - y + z = 1 \\ -x + 2y - z = 0 \\ x + z = 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + 3y - z = 4 \\ 3x + 4y - 2z = 2 \end{cases}$

3. Discutir, por Cramer, os sistemas:

a) $\begin{cases} 3x + 2y = m \\ 6x + 4y = m + 1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3x - y + 2z = 1 \\ x + Ry + z = 2 \\ 4x + 2y + 3z = k \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ 2x - y + 3z = 3 \\ Rx + y = -2 \end{cases}$

e) $\begin{cases} mx + y = -2 \\ -2x + y - z = m \\ 4x + y + mz = -5 \end{cases}$

c) $\begin{cases} mx + y + 2z = 1 \\ x + my + 2z = 2 \\ x + 2y + mz = 3 \end{cases}$

f) $\begin{cases} ax + 2ay + z = 5 \\ x + ay - z = 2 \\ 2x + 4y + z = a \end{cases}$

4. (EPUSP) Apresente três valores de <u>a</u> para os quais o sistema seja respectivamente indeterminado, incompatível e determinado.

$$\begin{cases} x + y = a \\ a^2x + y = a \end{cases}$$

5. Determine m para que tenha solução não trivial o sistema:

$$\begin{cases} x + y + mz = 0 \\ x + my + z = 0 \\ mx + y + z = 0 \end{cases}$$

6. (EPUSP) Para que valores de R o sistema

$$\begin{cases} x + y = k \\ x + y = senk \end{cases}$$

a) é indeterminado
b) é incompatível

7. (IME) Determine <u>a</u> para que o sistema seja indeterminado.

$$\begin{cases} x + 3y + 2z = 0 \\ 2x + 5y + az = 0 \\ 3x + 7y + z = 0 \end{cases}$$

8. Discutir os sistemas:

a) $\begin{cases} kx + 2y = -1 \\ 2x - y = m \end{cases}$

<u>Solução</u>

$\mathrm{D} = \begin{vmatrix} k & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -k - 4$, $\mathrm{Dx} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ m & -1 \end{vmatrix} = 1 - 2m$

$\mathrm{Dy} = \begin{vmatrix} k & -1 \\ 2 & m \end{vmatrix} = km + 2$

D ≠ 0 ⇒ -k - 4 ≠ 0 ⇒ k ≠ - 4 O Sistema é possível e determinado.
D = 0 ⇒ -k - 4 = 0 ⇒ k = - 4
Dx = 0 ⇒ 1 - 2m = 0 ⇒ m = $\frac{1}{2}$
Para k = -4 e m = $\frac{1}{2}$ ⇒ Dy = -4 $\frac{1}{2}$ + 2 = 0
Se k = -4 e m = $\frac{1}{2}$ (D = Dx = Dy = 0) O Sistema é possível e indeterminado.
Se k = -4 e m ≠ $\frac{1}{2}$ (D = 0, Dx ≠ 0 e Dy ≠ 0) O Sistema é impossível.

b) $\begin{cases} x + by = 1 \\ x + ay = a^2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} ax + y - z = 0 \\ x + ay + z = 1 \\ \quad\quad x + y = b \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + ay + a^2z = 1 \\ \frac{x}{a} + y + bz = 1 \\ \frac{x}{a^2} + \frac{y}{b} + z = 1 \end{cases}$

9. Qual a condição para que seja homogêneo o sistema:

$$\begin{cases} a^3x + 2ay = b \\ 2ax + y = c \end{cases}$$

Respostas
Matrizes
Definições

2) a) $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ b) $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 6 & 4 & 2 \\ 10 & 8 & 6 \end{bmatrix}$ c) $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

d) $D = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ e) $E = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ 1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 1 & -1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 3 & 0 & -5 & 1 \end{bmatrix}$

3) 30 4) a=3 ; b = 5 ; x = 1 e y = -2 5) x = 1; y = 2 e z = -4

Operações: Adição e Subtração

1) a) $\begin{bmatrix} 0 & 7 & 10 \\ 2 & 0 & 1 \\ 5 & 10 & 7 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 4 & -2 & 11 \\ 4 & 2 & -6 \\ 0 & 8 & 12 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} -4 & 9 & -1 \\ -2 & -2 & 7 \\ 5 & 2 & -5 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & -7 \\ -5 & -2 & 5 \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 0 & -3 & 12 \\ 15 & 18 & 3 \end{bmatrix}$ f) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & -\frac{7}{2} \\ -1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & -2 & -3 \end{bmatrix}$

g) $\begin{bmatrix} -\frac{12}{5} & \frac{24}{5} & \frac{6}{5} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ h) $\begin{bmatrix} -10 & 21 & 2 \\ -2 & -2 & 7 \\ 5 & 2 & -5 \end{bmatrix}$ i) $\begin{bmatrix} -\frac{20}{3} & \frac{61}{3} & \frac{71}{3} \\ \frac{22}{3} & \frac{14}{3} & -15 \\ -5 & \frac{26}{3} & 21 \end{bmatrix}$

j) $\begin{bmatrix} -7 & -2 & -\frac{21}{2} \\ 0 & 4 & -16 \\ -20 & -24 & -4 \end{bmatrix}$

3) a) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 4 \\ 8 & 7 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 4 & 12 \\ 0 & 8 \\ -4 & 4 \end{bmatrix}$

5) X = $\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}$ 6) $\begin{bmatrix} -8 & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ -10 & -\frac{7}{2} & \frac{23}{2} \\ 4 & -\frac{7}{2} & 11 \end{bmatrix}$

7) $X = \begin{bmatrix} -\frac{7}{5} & \frac{38}{5} \\ \frac{6}{5} & \frac{7}{5} \end{bmatrix}$ e $Y = \begin{bmatrix} \frac{19}{5} & -\frac{31}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$

Produto

1) a) $\begin{bmatrix} 6 & 6 & 16 \\ 7 & 26 & 19 \\ 11 & 10 & 38 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 17 & -8 & 19 \\ -1 & 5 & 16 \\ 3 & 7 & 48 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 6 & 4 & 3 \\ -5 & 0 & -17 \\ 14 & 6 & 5 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 9 & 20 & 25 \\ -2 & 6 & -1 \\ 10 & 10 & 7 \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} 12 & 10 & 19 \\ 2 & 26 & 2 \\ 25 & 16 & 43 \end{bmatrix}$ f) $\begin{bmatrix} 2 & -14 & 22 \\ -8 & -9 & 14 \\ -10 & -7 & 22 \end{bmatrix}$

g) $\begin{bmatrix} 19 & 18 & 44 \\ 29 & 74 & 56 \\ 20 & 22 & 77 \end{bmatrix}$ h) $\begin{bmatrix} 56 & 72 & 40 \\ 180 & 236 & 274 \\ 114 & 124 & 44 \end{bmatrix}$ i) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 4 & -2 & 5 \\ -1 & 2 & 7 \end{bmatrix}$

j) $\begin{bmatrix} 0 & 54 & 39 \\ 37 & 70 & 82 \\ 55 & 82 & 58 \end{bmatrix}$

2) $\begin{bmatrix} 23 & -4 \\ -6 & 27 \end{bmatrix}$

4) a) $\begin{bmatrix} -7 & -24 \\ -4 & -24 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} -11 & -18 \\ -9 & -20 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 9 & 0 \\ -18 & 86 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 13 & -6 \\ -13 & 82 \end{bmatrix}$

6) $\mathrm{AB} = \begin{bmatrix} -1 & -16 & -6 \\ 22 & 27 & 15 \end{bmatrix}$, BA não é possível.

7) $\mathrm{X} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} \\ \frac{8}{5} \end{bmatrix}$ 8) $\mathrm{X} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -2 \\ \frac{7}{2} & -3 \end{bmatrix}$ 9) $\begin{bmatrix} 159 & 231 \\ 210 & 806 \end{bmatrix}$ 10) $\begin{bmatrix} 3^{20} & 0 \\ 0 & 3^{20} \end{bmatrix}$

11) X = 1, Y = Z = 4

Matriz Transposta

1) a) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 3 \\ 5 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 5 & 3 & 5 \\ 3 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 2 & 6 & 4 \\ -4 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} 2 & 6 & 4 \\ -4 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ f) $\begin{bmatrix} 11 & 9 & 12 \\ 4 & -1 & -4 \end{bmatrix}$

g) $\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 0 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$ h) não é possível

4) X = 1, Y = Z = 1

Matrizes Inversas

1) a) $\begin{bmatrix} \frac{4}{11} & -\frac{3}{11} \\ \frac{1}{11} & \frac{2}{11} \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} \frac{3}{13} & \frac{5}{13} \\ \frac{2}{13} & -\frac{1}{13} \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{6}{5} & -\frac{8}{5} \\ -\frac{2}{5} & -\frac{4}{5} & \frac{7}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \end{bmatrix}$

4) $\mathrm{X} = \begin{bmatrix} -18 & -11 \\ 11 & 7 \end{bmatrix}$

5) a) $\begin{bmatrix} 1 & \frac{13}{5} \\ -1 & -\frac{2}{5} \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} \frac{18}{55} & -\frac{1}{55} \\ \frac{1}{55} & \frac{3}{55} \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} \frac{3}{11} & 1 \\ -\frac{5}{11} & 0 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 0 & -3 \\ \frac{18}{5} & -\frac{17}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -\frac{2}{5} & -\frac{22}{5} \end{bmatrix}$

Determinantes

1) a) 17 b) -1 c) 10 d) 2 e) 8 f) -13 g) 1 h) 0

2) a) 4 b) -6 c) -20 d) 0 e) 54 f) 0

3) a) S = {2,$\frac{3}{2}$} b) S = {0,-$\frac{11}{2}$} c) S = {0,-1}

4) S = {X E $\Re$ | X ≤ -5 ou X ≥ 4}

Laplace

a) -11 b) 0 c) 9 d) 0 e) -6 f) 35 g) 5 h) 8 i) -25

Propriedades dos determinantes

2) a) -m b) m c) 6m d) m

3) S = {0, $-\frac{1}{2}$, -1, -2}

6) -12

8) a ≠ $\pm\sqrt{2}$

9) X ≠ Rπ

Regra de CHIÓ

1) a) -99 b) 66 c) -5 d) 0 e) 126

2) S = {0, -1, -2}

3) a) S = $\mathfrak{R}$ b) S = {1} c) S = {0, 1, 4, 6}

4) $-\frac{1}{2}$ < X < $\frac{1}{2}$

Determinante de Vandermonde

1) a) 2 b) 2

2) a) (a – b) $(a^3 - a)(a^3 - b)$ b) -240

3) $\pm$ 3

4) 2

5) a) S = { 0, 1, -1} b) S = { -1, 2, 3 } c) S = { -2, $-\sqrt{2}$, 0, 1, $\sqrt{2}$, 2}

6) 1, 2 e 3

Sistemas Lineares

Escalonamento

1) a) S = {(2, -1)} b) S = {(4, 0, -1)} c) S = {(3, 1, -2)} d) S = {(3, 4, -3)}

e) S = {(-1,1,1-1)} f) S = {(-1, 2, 1, 0, 3)}

2) b) S = {($\frac{7-k}{4}$,k), kER} c) S = {(1-2k, k, k), kER}

d) S = {($-\frac{k}{2}, k, \frac{k}{2}, k$), kER}

3) b) S = $\varnothing$ c) S = $\varnothing$ d) S = $\varnothing$

4) a) S = {(-3, 5)}

b) S = {(0, 0, 0)}

c) S = {(1, -2, 1)}

d) S = {($\frac{9}{8}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{3}{8}$)}

e) S = {(2, 0, 1)}

f) S = {(7, $\frac{1}{2}$, -$\frac{3}{2}$, 4)}

g) S = {(-1, 0, 1, 2)}

h) S = {($\frac{15-6k}{15}$, $\frac{16k-5}{5}$, k), kER}

i) S = {(2+2k, - $\frac{1+2k}{3}$, - $\frac{2+7k}{3}$, k), kER}

j) S = ∅

k) S = {(6-8k, $\frac{5k-1}{2}$, k), kER}

Regra de Cramer

1) a) S = {(4, -2)} b) S = {(1, 1, -1)} c) S = {(3, -2, 3)} d) S = {(0, 0, 0)} e) S = {(-1, 0, 2)} f) S = {(5, 1, -1)}
g) S = {(3, 2, 1, 0)}

2) a) possível e determinado
b) possível e indeterminado
c) impossível

3) a) $\begin{cases} \text{m} \neq 1, \text{impossível} \\ \text{m} = 1, \text{ possível e indeterminado} \end{cases}$

b) $\begin{cases} \text{k} = 1, \text{impossível} \\ \text{k} \neq 1, \text{ possível e determinado} \end{cases}$

c) $\begin{cases} \text{m} = 1, \text{m} = 2 \text{ ou m} = -3, \text{ impossível} \\ \text{m} \neq 1, \text{ m} \neq 2 \text{ e m} \neq -3, \text{ possível e determinado} \end{cases}$

d) $\begin{cases} \text{k} = 3, \text{sistema possível e indeterminado} \\ \text{k} \neq 3, \text{ sistema possível e determinado} \end{cases}$

e) $\begin{cases} \text{m} = -4, \text{sistema impossível} \\ \text{m} = 1, \text{sistema possível e indeterminado} \\ \text{m} \neq -4 \text{ e m} \neq 1, \text{sistema possível e determinado} \end{cases}$

f) $\begin{cases} \text{a} = 2, \text{sistema impossível} \\ \text{a} \neq 2, \text{sistema possível e determinado} \end{cases}$

4) 1, ∃ a ER e a = 0

5) m = 1 ou m = -2

6) a) k = 0 b) k ≠ 0

7) $\frac{3}{2}$

8) b) $\begin{cases} \text{a} \neq \text{b}, \text{sistema possível e determinado} \\ \text{a} = \text{b} = \pm 1, \text{sistema possível e indeterminado} \\ \text{a} = \text{b} = 0, \text{sistema impossível} \end{cases}$

c) Sistema impossível

d) $\begin{cases} a \neq b, \text{a e b não nulos, sistema possível e determinado} \\ a = b \neq 0, \text{sistema possível e indeterminado} \\ a = 0 \text{ ou } b = 0, \text{sistema impossível} \end{cases}$

9) b = c = 0